1 数列の極限(1)

一般項が次の式で表される数列の極限を求めよ。

(1) $\dfrac{6n}{\sqrt{n^2+2n}+n}$　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n}}$　(3) $\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2})$

(4) $\log_2 \sqrt[n]{3}$　(5) $\cos n\pi$

解説

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}=\frac{6}{2}=3$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n}}{(2n+3)-2n}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n})=\infty$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2})=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\{(n+1)-(n+2)\}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot(-1)}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}=-\frac{1}{2}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log_2\sqrt[n]{3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log_2 3=0$

(5) 数列$\{\cos n\pi\}$は　$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots\cdots$

一定の値に収束せず，正の無限大にも負の無限大にも発散しない。

よって，振動する(極限はない)。

2 数列の極限(2)

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3+7+11+\cdots\cdots+(4n-1)}{5+7+9+\cdots\cdots+(2n+3)}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{\log_3(1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2)-\log_3 n^3\}$

解説

(1) $\displaystyle 3+7+11+\cdots\cdots+(4n-1)=\sum_{k=1}^{n}(4k-1)=4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n=n(2n+1)$

$\displaystyle 5+7+9+\cdots\cdots+(2n+3)=\sum_{k=1}^{n}(2k+3)=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+3n=n(n+4)$

よって　$\displaystyle(与式)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n+1)}{n(n+4)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{4}{n}}=2$

(2) $\displaystyle(与式)=\lim_{n\to\infty}\left\{\log_3\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\log_3 n^3\right\}=\lim_{n\to\infty}\log_3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\log_3\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\log_3\frac{1}{3}=-1$

3 数列の極限(3)

一般項が次の式で表される数列の極限を求めよ。

(1) $3\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$　(2) $5^n-(-3)^n$　(3) $\dfrac{3^{n+1}-2^n}{3^n+2^n}$　(4) $\dfrac{r^n}{2+r^{n+1}}$ $(r>-1)$

解説

(1) $\left|-\dfrac{3}{4}\right|<1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}3\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}=0$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{5^n-(-3)^n\}=\lim_{n\to\infty}5^n\left\{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^n\right\}=\infty$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-2^n}{3^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=3$

(4) $-1<r<1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{2+r^{n+1}}=\frac{0}{2+0}=0$

$r=1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{2+r^{n+1}}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$

$r>1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{2+r^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{r}}{\frac{2}{r^{n+1}}+1}=\frac{\frac{1}{r}}{0+1}=\frac{1}{r}$

注意

無限等比数列の項は，公比が　$-1<$（公比）$\leqq 1$　のとき収束し，それ以外で発散

4 はさみうちの原理(1)

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}$ を求めよ。

(2) $\displaystyle a_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2+n}$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

解説

(1) $-1\leqq\sin\dfrac{n\pi}{2}\leqq 1$ であるから　$\displaystyle-\frac{1}{n}\leqq\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\leqq\frac{1}{n}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}=0$

(2) $\dfrac{1}{n^2+k}<\dfrac{1}{n^2}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ であるから

$\displaystyle a_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2+n}$

$\displaystyle<\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n^2}\cdot n=\frac{1}{n}$

よって　$0<a_n<\dfrac{1}{n}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$

5 はさみうちの原理(2)

実数xに対し，xを超えない最大の整数を$[x]$とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{[\sqrt{2}\,n]}{n}$を求めよ。

解説

$\sqrt{2}\,n-1<[\sqrt{2}\,n]\leqq\sqrt{2}\,n$ より

$\dfrac{\sqrt{2}\,n-1}{n}<\dfrac{[\sqrt{2}\,n]}{n}\leqq\dfrac{\sqrt{2}\,n}{n}$　$(\because\ n>0)$

ここで$n\to\infty$のとき

$\dfrac{\sqrt{2}\,n-1}{n}=\sqrt{2}-\dfrac{1}{n}\to\sqrt{2}$　,　$\dfrac{\sqrt{2}\,n}{n}=\sqrt{2}\to\sqrt{2}$

であるから

$\dfrac{[\sqrt{2}\,n]}{n}\to\sqrt{2}$

注意　[ ]　ガウス記号について

$[x]$はxを超えない最大の整数。

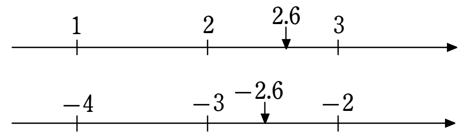
例えば$[2.6]=2$,

$[-2.6]=-3$

したがって$[x]\leqq x<[x]+1$より

（例）　2　2.6　3

$x-1<[x]\leqq x$



6 はさみうちの原理(3)

数列$\{a_n\}$を$\begin{cases}a_1=0\\ a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}\ \ (n=1,\ 2,\ \cdots)\end{cases}$によって定義する。

(1) 方程式$x=\sqrt{x+2}$の実数解αを求めよ。

(2) (1)で求めたαに対して，不等式

$|a_{n+1}-\alpha|\leqq\dfrac{1}{2}|a_n-\alpha|$　$(n=1,\ 2,\ \cdots)$

が成り立つことを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$を求めよ。

解説

(1) $x=\sqrt{x+2}$ より，両辺を2乗して

$x^2=x+2$　(ただし$x\geqq 0$)

$(x+1)(x-2)=0$

$\alpha\geqq 0$だから求めるαは　$\alpha=2$

(2) $|a_{n+1}-2|=|\sqrt{a_n+2}-2|$　← この形からa_n-2を作るのが目標

$\displaystyle=\left|\frac{(\sqrt{a_n+2}-2)(\sqrt{a_n+2}+2)}{\sqrt{a_n+2}+2}\right|$　極限でおなじみの分子の有理化

$\displaystyle=\left|\frac{a_n+2-2^2}{\sqrt{a_n+2}+2}\right|$

$\displaystyle=\frac{1}{\sqrt{a_n+2}+2}|a_n-2|\leqq\frac{1}{2}|a_n-2|$　$(\because\ \sqrt{a_n+2}\geqq 0)$　(証明終)

(3) (2)の不等式をくりかえすと

$|a_n-2|\leqq\dfrac{1}{2}|a_{n-1}-2|$

$\leqq\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}|a_{n-2}-2|$

$\leqq\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}|a_1-2|=2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　$(\because\ a_1=0)$

よって，　$0\leqq|a_n-2|\leqq 2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　← $|a_n-2|\to 0$ を示すため左側に「0」をおく

この不等式において，$n\to\infty$のとき

$0\to 0$，$2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\to 0$であるから，$|a_n-2|\to 0$　← はさみうちの原理

すなわち　$a_n\to 2$　← 一般的に$|a_n-\alpha|\to 0$　⇔　$a_n\to\alpha$

(a_nとαの誤差がなくなるから)

7 無限等比数列の収束条件

無限等比数列$\{(5-x^2)^n\}$が収束するxの値の範囲を求めよ。また，そのときの数列の極限値を求めよ。

解説

公比をrとすると，$r=5-x^2$だから，
収束するxの値の範囲は
$-1<5-x^2\leqq 1$より$4\leqq x^2<6$
$x^2<6$より，$-\sqrt{6}<x<\sqrt{6}$ …①
$4\leqq x^2$より，$x\leqq -2$，$2\leqq x$ …②
①，②より，$-\sqrt{6}<x\leqq -2$，$2\leqq x<\sqrt{6}$
また，$-\sqrt{6}<x<-2$，$2<x<\sqrt{6}$のとき，
$-1<r<1$だから，数列の極限値は0
$x=\pm 2$のとき，$r=1$だから，数列の極限値は1

注意

無限等比数列は，$|(\text{公比})|>1$のときは数列の絶対値が大きくなって発散し，

$-1<|(\text{公比})|\leqq 1$のときは収束する。

8 r^nを含む極限

$r\fallingdotseq -1$のとき，数列$\left\{\dfrac{r^n-1}{r^n+1}\right\}$の極限を調べよ。

解説

(i) $|r|<1$のときは，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n=0$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-1}{r^n+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$

(ii) $|r|>1$のときは，$\left|\dfrac{1}{r}\right|<1$だから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^n=0$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-1}{r^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{r}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{r}\right)^n}=1$

(iii) $r=1$のときは，$r^n=1$　よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-1}{r^n+1}=0$

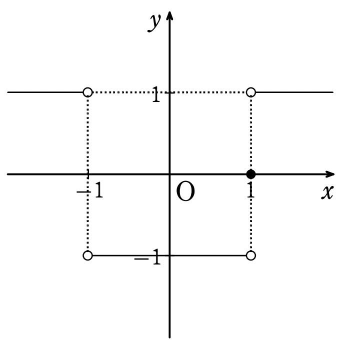
(i), (ii), (iii) より
$|r|<1$のとき-1，$|r|>1$のとき1，$r=1$のとき0

参考

$f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^n-1}{x^n+1}$ $(x\fallingdotseq -1)$のグラフは

$$f(x)=\begin{cases}-1 & (-1<x<1)\\ 1 & (x<-1,\ 1<x)\\ 0 & (x=1)\end{cases}$$

なので右図のようになる。



注意

r^nを含む式の極限を調べるには，通常，次の4通り考えればよい。

(i) $|r|<1$のとき$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r^n=0$

(ii) $|r|>1$のとき$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$

(iii) $r=1$のとき$\displaystyle\lim_{n\to\infty} 1^n=1$

(iv) $r=-1$のとき$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-1)^n$は発散する　（本問題では$r\fallingdotseq -1$なので考えない）

9 漸化式で定められる数列の極限値

次の条件によって定められる数列$\{a_n\}$の極限を求めよ。

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+1$　　　(2)　$a_1=0$，$a_2=1$，$a_{n+2}=\dfrac{1}{4}(a_{n+1}+3a_n)$

解説

(1)　与えられた漸化式を変形すると

$a_{n+1}-2=\dfrac{1}{2}(a_n-2)$　　　また　$a_1-2=1-2=-1$

よって，数列$\{a_n-2\}$は初項-1，公比$\dfrac{1}{2}$の等比数列であるから

$a_n-2=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　　　ゆえに　$a_n=2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=2$

注意

$a_{n+1}=pa_n+q$型の漸化式は，$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$　（αは特性方程式の解）と変形

(2)　与えられた漸化式を変形すると

$a_{n+2}-a_{n+1}=-\dfrac{3}{4}(a_{n+1}-a_n)$　　また　$a_2-a_1=1-0=1$

ゆえに，数列$\{a_{n+1}-a_n\}$は初項1，公比$-\dfrac{3}{4}$の等比数列で

$$a_{n+1}-a_n=\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

よって，$n\geqq 2$のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{3}{4}\right)^{k-1}=0+\frac{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)}=\frac{4}{7}\left\{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right\}$$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{7}\left\{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right\}=\frac{4}{7}$

別解　与えられた漸化式を変形すると

$$a_{n+2}-a_{n+1}=-\frac{3}{4}(a_{n+1}-a_n),\quad a_{n+2}+\frac{3}{4}a_{n+1}=a_{n+1}+\frac{3}{4}a_n$$

ゆえに　$a_{n+1}-a_n=\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$，$a_{n+1}+\dfrac{3}{4}a_n=a_2+\dfrac{3}{4}a_1=1$

辺々引いて　$-\dfrac{7}{4}a_n=\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}-1$

よって　$a_n=\dfrac{4}{7}\left\{1-\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}\right\}$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{7}\left\{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right\}=\frac{4}{7}$

注意

隣接3項間の漸化式では

a_{n+2}をx^2，a_{n+1}をx，a_nを1とおいた2次方程式の解をα，βとすると，与式は

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$　および　$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$

と変形できる。

10 無限級数

次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$

(2) $1+(-1)+1+(-1)+\ \cdots\cdots\ +(-1)^{n-1}+\ \cdots\cdots$

解説

(1) 第N部分和をS_Nとおく。

$\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

であるから

$$\begin{aligned}S_N&=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N+1}\right)+\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+2}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}\right)\end{aligned}$$

$N\to\infty$のとき$\{S_N\}$は収束するから，この無限級数も収束し，その和は

$\displaystyle\lim_{N\to\infty}S_N=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}\right)=\frac{3}{4}$

(2) 第N部分和をT_Nとおく。

この数列は初項1，公比(-1)の等比数列であるから

$$\begin{aligned}T_N&=1\cdot\frac{1-(-1)^N}{1-(-1)}\\&=\frac{1}{2}\{1-(-1)^N\}\end{aligned}$$

$N\to\infty$のとき$\{T_N\}$は発散（振動）するから，この無限級数も発散する。

11 無限等比級数の収束・発散

次の無限等比級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots$　(2) $2+3+\frac{9}{2}+\cdots$　(3) $4-2\sqrt{3}+3\cdots$

解説

(1) 初項1，公比$\frac{1}{2}$で，$\left|\frac{1}{2}\right|<1$だから，収束して

その和は$\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

(2) 初項2，公比$\frac{3}{2}$で，$\left|\frac{3}{2}\right|>1$だから，発散。

(3) 初項4，公比$-\frac{\sqrt{3}}{2}$で，$\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|<1$だから，収束して

その和は$\dfrac{4}{1-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\dfrac{4}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{8}{2+\sqrt{3}}=8(2-\sqrt{3})$

注意

等比数列の和の公式は

$S_n=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$であるので，

無限等比級数

$S=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}+\cdots\cdots$　は

$|r|<1$ならば，収束してその和は$\dfrac{a}{1-r}$となる。

12 無限等比級数

次の無限等比級数について答えよ。

$x+x(x+1)+x(x+1)^2+\ \cdots\cdots\ +x(x+1)^{n-1}+\ \cdots\cdots$　…①

(1) ①が収束するためのxについての条件を求めよ。

(2) (1)で求めたxに対し，①の和を$f(x)$とおくとき，関数$y=f(x)$のグラフをかけ。

解説

(1) ①が収束するための条件は初項xにおいて$x=0$もしくは，

公比$x+1$において$-1<x+1<1$　$\Leftrightarrow$　$-2<x<0$

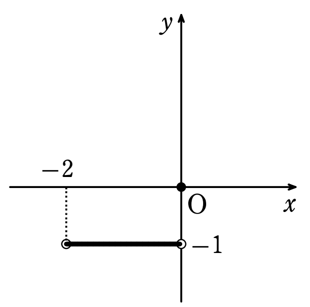
したがって，$-2<x\leqq 0$

(2) $x=0$のとき$f(x)=0$　つまり，$f(0)=0$

$-2<x<0$のとき$-1<$公比<1なので

$f(x)=\dfrac{x}{1-(x+1)}=\dfrac{x}{-x}=-1$

よって，グラフは右図のようになる。

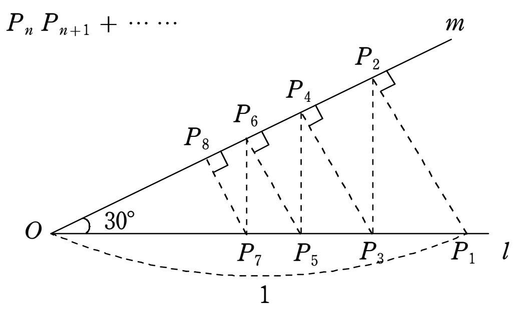


13 図形の無限級数

下図のように，直線l上の点P_1から直線mへひいた垂線の足をP_2，m上のP_2からlへひいた垂線の足をP_3とし，以下同様に垂線をひくことによってP_4，P_5，P_6，…　を定めていく。$OP_1=1$とするとき，無限級数

$P_1P_2+P_2P_3+P_3P_4+\ \cdots\cdots\ +P_nP_{n+1}+\cdots\cdots$

の和を求めよ。



解説

無限級数において初項は$P_1P_2=OP_1\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$　…図1

公比は$\dfrac{P_{n+1}P_{n+2}}{P_nP_{n+1}}=\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　…図2

よって求める和は，初項$\frac{1}{2}$，公比$\frac{\sqrt{3}}{2}$の無限等比級数である。

公比$\frac{\sqrt{3}}{2}$は，　$-1<\frac{\sqrt{3}}{2}<1$なので収束し，求める和は

$\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$　答

図1

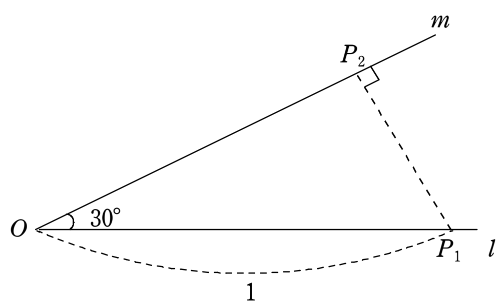
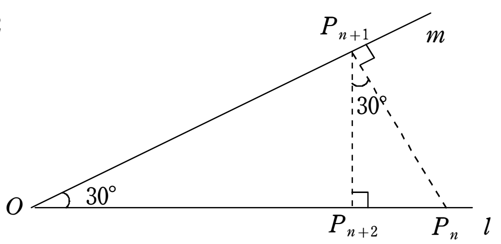


図2



注意

数Ⅲの図形量の無限級数は，無限等比級数での出題になりやすい。

したがって，和を求めるには初項と公比を求めればよい。

14 $\{S_n\}$が収束するならば　$a_n\to 0$

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$を求めよ。

(2) 無限級数　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ …①　が収束するとき，無限級数　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(a_n+1)}$ …②　は発散することを示せ。

解説

(1) 部分和を$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$とすると

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\cdot\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}\\&=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})\\&=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots\cdots+(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\\&=\sqrt{n+1}-1\end{aligned}$$

$n\to\infty$のとき$S_n\to+\infty$　よって$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\infty$　答

(2) 無限級数①が収束するから　$a_n\to 0\ (n\to\infty)$

これを用いると②において

$$\frac{n+1}{n(a_n+1)}=\frac{1+\frac{1}{n}}{a_n+1}\to\frac{1+0}{0+1}=1$$

すなわち

数列$\left\{\dfrac{n+1}{n(a_n+1)}\right\}$は0に収束しないから無限級数②は発散する。答

注意

(1) $n\to\infty$のとき$a_n\to 0$であっても，S_nが収束するとは限らない。

(2) $n\to\infty$において$S_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n+\cdots\cdots$が収束するとき$a_n\to 0$

$\{S_n\}$が収束する　$\Longrightarrow$　$a_n\to 0$

$\{S_n\}$が発散する　$\Longleftarrow$　$a_n\to 0$ではない

15 関数の極限(1)

次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x-2}{x^2-3x+2}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{3}{x+3}-1\right)$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$

解説

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3x-2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+1)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)^2}{x-1}=9$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{3}{x+3}-1\right)=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x}\cdot\frac{3-(x+3)}{x+3}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x(x+3)}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x+3}\right)=-\frac{1}{3}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)-2}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

16 極限値が存在するための定数の決定

次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

$$\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x+1}-b}{x-1}=\sqrt{2}$$

解説

$\lim_{x\to1}(x-1)=0$ であるから　$\lim_{x\to1}(a\sqrt{x+1}-b)=0$

ゆえに　$\sqrt{2}a-b=0$　　よって　$b=\sqrt{2}a$ ……①

このとき

$$\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x+1}-b}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{a(\sqrt{x+1}-\sqrt{2})}{x-1}=a\cdot\lim_{x\to1}\frac{(x+1)-2}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}$$
$$=a\cdot\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}$$
$$=a\cdot\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}$$
$$=\frac{a}{2\sqrt{2}}$$

$\frac{a}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ から　$a=4$　　① から　$b=4\sqrt{2}$

したがって　$a=4,\ b=4\sqrt{2}$

17 関数の極限(2)

(1) $\lim_{x\to1+0}\frac{x-2}{x-1}$，$\lim_{x\to1-0}\frac{x-2}{x-1}$ を求めよ。

(2) $x\longrightarrow0$ のとき，関数 $\frac{x^2-x}{|x|}$ の極限は存在するかどうかを調べよ。

解説

(1) $x\longrightarrow1+0$ のとき　$x-1\longrightarrow+0$，$x-2\longrightarrow-1+0$

よって　$\lim_{x\to1+0}\frac{x-2}{x-1}=-\infty$

また，$x\longrightarrow1-0$ のとき　$x-1\longrightarrow-0$，$x-2\longrightarrow-1-0$

よって　$\lim_{x\to1-0}\frac{x-2}{x-1}=\infty$

(2) $x>0$ のとき　$\lim_{x\to+0}\frac{x^2-x}{|x|}=\lim_{x\to+0}\frac{x(x-1)}{x}=\lim_{x\to+0}(x-1)=-1$

$x<0$ のとき　$\lim_{x\to-0}\frac{x^2-x}{|x|}=\lim_{x\to-0}\frac{x(x-1)}{-x}=\lim_{x\to-0}(-x+1)=1$

$\lim_{x\to+0}\frac{x^2-x}{|x|}\neq\lim_{x\to-0}\frac{x^2-x}{|x|}$ であるから，極限は存在しない。

18 関数の極限(3)

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{x\to\infty}(x^3-3x^2+5)$　　(2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+4x-1}{2x^2-3}$

(3) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x}-x)$　　(4) $\lim_{x\to-\infty}\frac{4^x}{3^x+2^x}$

解説

(1) $\lim_{x\to\infty}(x^3-3x^2+5)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^3}\right)=\infty$

(2) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+4x-1}{2x^2-3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{3}{x^2}}=\frac{3+0-0}{2-0}=\frac{3}{2}$

(3) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-x)-x^2}{\sqrt{x^2-x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1}=\frac{-1}{\sqrt{1-0}+1}=-\frac{1}{2}$$

(4) $\lim_{x\to-\infty}\frac{4^x}{3^x+2^x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x}{\left(\frac{3}{2}\right)^x+1}=\frac{0}{0+1}=0$

19 関数の極限(4)

次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\log_3x+\log_3(\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-1})\right\}$　　(2) $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x}+x)$

解説

(1) $\frac{1}{2}\log_3x+\log_3(\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-1})=\log_3\sqrt{x}+\log_3\frac{(3x+1)-(3x-1)}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-1}}$

$$=\log_3\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-1}}$$

であるから

$$(\text{与式})=\lim_{x\to\infty}\log_3\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-1}}=\lim_{x\to\infty}\log_3\frac{2}{\sqrt{3+\frac{1}{x}}+\sqrt{3-\frac{1}{x}}}$$
$$=\log_3\frac{2}{2\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}$$

(2) $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x}+x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+3x)-x^2}{\sqrt{x^2+3x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}-x}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}\right)}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{-\sqrt{1+\frac{3}{x}}-1}$$
$$=-\frac{3}{2}$$

別解　$x=-t$ とおくと，$x\longrightarrow-\infty$ のとき $t\longrightarrow\infty$ であるから

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x}+x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-3t}-t)=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2-3t)-t^2}{\sqrt{t^2-3t}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-3t}{\sqrt{t^2-3t}+t}=\lim_{t\to\infty}\frac{-3}{\sqrt{1-\frac{3}{t}}+1}=-\frac{3}{2}$$

20 関数の極限(5)

次の極限値を求めよ。ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{[3x]}{x}$　　(2) $\lim_{x\to\infty}(3^x+5^x)^{\frac{1}{x}}$

解説

(1) 不等式 $[3x]\leqq3x<[3x]+1$ が成り立つ。

よって，$x>0$ のとき　$\frac{[3x]}{x}\leqq3<\frac{[3x]}{x}+\frac{1}{x}$

ここで，$3<\frac{[3x]}{x}+\frac{1}{x}$ から　$3-\frac{1}{x}<\frac{[3x]}{x}$　　∴　$3-\frac{1}{x}<\frac{[3x]}{x}\leqq3$

$\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{x}\right)=3$ であるから　$\lim_{x\to\infty}\frac{[3x]}{x}=3$

(2) $(3^x+5^x)^{\frac{1}{x}}=\left[5^x\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^x+1\right\}\right]^{\frac{1}{x}}=5\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}$

$x\longrightarrow\infty$ であるから，$x>1$，$0<\frac{1}{x}<1$ と考えてよい。

ゆえに　$1=\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^x+1\right\}^0<\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}<\left(\frac{3}{5}\right)^x+1$

$\lim_{x\to\infty}\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^x+1\right\}=1$ であるから　$\lim_{x\to\infty}\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}=1$

よって　$\lim_{x\to\infty}(3^x+5^x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}5\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}=5$

別解　$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^x=0$ であるから　$\lim_{x\to\infty}(3^x+5^x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}5\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}=5(0+1)^0=5$

21 三角関数の極限(1)

次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{x}$　　(2) $\lim_{x\to0}\frac{\tan x^\circ}{x}$　　(3) $\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1-\cos x}$

解説

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{3x}\cdot3=1\cdot3=3$

別解　$3x=\theta$ とおくと，$x\longrightarrow0$ のとき $\theta\longrightarrow0$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{x}=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\frac{\theta}{3}}=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot3=1\cdot3=3$$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{\tan x^\circ}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan\frac{\pi}{180}x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{\pi}{180}x}{\frac{\pi}{180}x}\cdot\frac{\pi}{180}\cdot\frac{1}{\cos\frac{\pi}{180}x}=1\cdot\frac{\pi}{180}\cdot\frac{1}{1}$

$$=\frac{\pi}{180}$$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2(1+\cos x)}{1-\cos^2x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2(1+\cos x)=1^2\cdot(1+1)=2$

22 三角関数の極限(2)

次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}$

解説

(1) $x-\dfrac{\pi}{2}=t$ とおくと　$x\longrightarrow\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$t\longrightarrow0$

また　$\cos x=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+t\right)=-\sin t$，$2x-\pi=2t$

よって，求める極限値は　$\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{-\sin t}{2t}=\lim_{t\to0}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\sin t}{t}=-\frac{1}{2}$

(2) $\dfrac{1}{x}=t$ とおくと　$x\longrightarrow\infty$ のとき　$t\longrightarrow+0$

よって　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to+0}\frac{\sin t}{t}=1$

(3) $-1\leqq\sin\dfrac{1}{x}\leqq1$，$x\neq0$ であるから　$-x^2\leqq x^2\sin\dfrac{1}{x}\leqq x^2$

$\displaystyle\lim_{x\to0}(-x^2)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to0}x^2=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}=0$

23 関数の連続性

$-1\leqq x\leqq2$ とする。次の関数の連続性について調べよ。

(1) $f(x)=\begin{cases}x^2 & (x\neq0)\\ 1 & (x=0)\end{cases}$　　(2) $g(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ $(x\neq1)$，$g(1)=0$

(3) $h(x)=[x]$　ただし，[　] はガウス記号とする。

解説

(1) $x\longrightarrow0$ のとき $x\neq0$ であるから　$f(x)=x^2$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}x^2=0$　　$f(0)=1$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)\neq f(0)$

よって　$-1\leqq x<0$，$0<x\leqq2$ で連続；$x=0$ で不連続。

(2) $\displaystyle\lim_{x\to1}g(x)=\lim_{x\to1}\frac{1}{(x-1)^2}=\infty$　　極限値 $\displaystyle\lim_{x\to1}g(x)$ は存在しないから

$-1\leqq x<1$，$1<x\leqq2$ で連続；$x=1$ で不連続。

(3) $-1\leqq x<0$ のとき　$h(x)=-1$，　$0\leqq x<1$ のとき　$h(x)=0$，

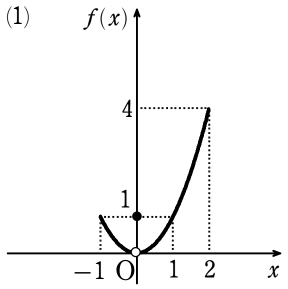
$1\leqq x<2$ のとき　$h(x)=1$，　$h(2)=2$

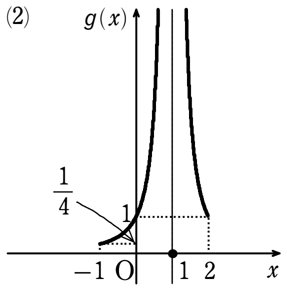
よって　$\displaystyle\lim_{x\to-0}h(x)=-1$，$\displaystyle\lim_{x\to+0}h(x)=0$　　ゆえに，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to0}h(x)$ は存在しない。

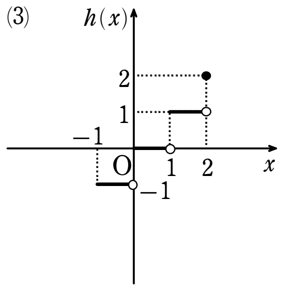
$\displaystyle\lim_{x\to1-0}h(x)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to1+0}h(x)=1$　　ゆえに，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to1}h(x)$ は存在しない。

$\displaystyle\lim_{x\to2-0}h(x)=1$，$h(2)=2$　　ゆえに　$\displaystyle\lim_{x\to2-0}h(x)\neq h(2)$

よって　$-1\leqq x<0$，$0<x<1$，$1<x<2$ で連続；$x=0$，1，2 で不連続。

(1)


(2)


(3)


24 左，右の極限と関数の連続性

xの関数$f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{x+x^n}$　$(x>-1,\ x\neq0)$ について答えよ。

(1) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$の値を求めよ。

(2) $y=f(x)$のグラフをかけ。

解説

(1) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

$=\dfrac{0}{\frac{1}{2}+0}$

$=0$

(2) i) $-1<x<1$，$x\neq0$のとき

$x^n\to0$ $(n\to\infty)$であるから

$f(x)=\dfrac{0}{x+0}=0$

ii) $x=1$のとき

$f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

iii) $x>1$のとき

$f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x}{\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}+1}$

$=\dfrac{x}{0+1}$

$=x$

よって右図のようになる。