1

次の関係を，(1)～(3) は $p=\log_a M$，(4)～(6) は $a^p=M$ の形で表せ。

(1) $3^4=81$　(2) $5^0=1$　(3) $8^{\frac{1}{3}}=2$

(4) $2=\log_{10}100$　(5) $6=\log_{\sqrt{2}}8$　(6) $-\dfrac{1}{2}=\log_9\dfrac{1}{3}$

2

次の値を求めよ。

(1) $\log_3 243$　(2) $\log_5 5$　(3) $\log_4 1$

(4) $\log_3\dfrac{1}{9}$　(5) $\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{27}$　(6) $\log_{0.2}5$

(7) $\log_2\sqrt{2}$　(8) $\log_5\sqrt{125}$　(9) $\log_2\sqrt[3]{16}$

3

次の計算をせよ。

(1) $\log_5 10-\log_5 2\sqrt{5}$　(2) $\log_{10}5\sqrt{5}+\dfrac{1}{2}\log_{10}\dfrac{4}{5}$

4

次の値を簡単にせよ。

(1) $\log_8 32$　(2) $\log_9\dfrac{1}{3}$　(3) $\log_{\frac{1}{5}}\sqrt[5]{125}$

(4) $\log_2 3\cdot\log_3 2$　(5) $\log_3 5\cdot\log_5 9$　(6) $\log_4 5\cdot\log_5 8$

5

次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{1}{2}\log_6 12+3\log_6\sqrt{3}-\log_6 18$　(2) $\log_2 3\cdot\log_3 5\cdot\log_5 8$

(3) $(\log_3 5+\log_9 25)(\log_5 9+\log_{25}3)$

解説

(1) $4=\log_3 81$

(2) $0=\log_5 1$

(3) $\dfrac{1}{3}=\log_8 2$

(4) $10^2=100$

(5) $(\sqrt{2})^6=8$

(6) $9^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$

解説

(1) $\log_3 243=\log_3 3^5=5$　(2) $\log_5 5=1$　(3) $\log_4 1=0$

(4) $\log_3\dfrac{1}{9}=\log_3 3^{-2}=-2$　(5) $\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{27}=\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=3$

(6) $\log_{0.2}5=\log_{\frac{1}{5}}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-1}=-1$　(7) $\log_2\sqrt{2}=\log_2 2^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$

(8) $\log_5\sqrt{125}=\log_5(5^3)^{\frac{1}{2}}=\log_5 5^{\frac{3}{2}}=\dfrac{3}{2}$

(9) $\log_2\sqrt[3]{16}=\log_2(2^4)^{\frac{1}{3}}=\log_2 2^{\frac{4}{3}}=\dfrac{4}{3}$

解説

(1) (与式)$=\log_5\dfrac{10}{2\sqrt{5}}=\log_5\sqrt{5}=\log_5 5^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$

(2) (与式)$=\log_{10}\left\{5\sqrt{5}\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}=\log_{10}\left(5\sqrt{5}\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)=\log_{10}10=1$

解説

(1) $\log_8 32=\dfrac{\log_2 32}{\log_2 8}=\dfrac{\log_2 2^5}{\log_2 2^3}=\dfrac{5}{3}$

(2) $\log_9\dfrac{1}{3}=\dfrac{\log_3\frac{1}{3}}{\log_3 9}=\dfrac{\log_3 3^{-1}}{\log_3 3^2}=-\dfrac{1}{2}$

(3) $\log_{\frac{1}{5}}\sqrt[5]{125}=\dfrac{\log_5\sqrt[5]{125}}{\log_5\frac{1}{5}}=\dfrac{\log_5 5^{\frac{3}{5}}}{\log_5 5^{-1}}=-\dfrac{3}{5}$

(4) $\log_2 3\cdot\log_3 2=\log_2 3\times\dfrac{\log_2 2}{\log_2 3}=\log_2 2=1$

(5) $\log_3 5\cdot\log_5 9=\log_3 5\times\dfrac{\log_3 9}{\log_3 5}=\log_3 9=\log_3 3^2=2$

(6) $\log_4 5\cdot\log_5 8=\dfrac{\log_2 5}{\log_2 4}\times\dfrac{\log_2 8}{\log_2 5}=\dfrac{\log_2 5}{\log_2 2^2}\times\dfrac{\log_2 2^3}{\log_2 5}=\dfrac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2}=\dfrac{3}{2}$

解説

(1) 与式$=\log_6\sqrt{12}+\log_6(\sqrt{3})^3-\log_6 18=\log_6\dfrac{\sqrt{12}\times(\sqrt{3})^3}{18}=\log_6 1=0$

別解　与式$=\dfrac{1}{2}\log_6(2^2\times3)+\dfrac{3}{2}\log_6 3-\log_6(2\times3^2)$

$=\dfrac{1}{2}(2\log_6 2+\log_6 3)+\dfrac{3}{2}\log_6 3-(\log_6 2+2\log_6 3)=0$

(2) 与式$=\log_2 3\times\dfrac{\log_2 5}{\log_2 3}\times\dfrac{\log_2 8}{\log_2 5}=\log_2 8=\log_2 2^3=3$

(3) 与式$=\left(\log_3 5+\dfrac{\log_3 25}{\log_3 9}\right)\left(\dfrac{\log_3 9}{\log_3 5}+\dfrac{\log_3 3}{\log_3 25}\right)$

$=\left(\log_3 5+\dfrac{\log_3 5^2}{\log_3 3^2}\right)\left(\dfrac{\log_3 3^2}{\log_3 5}+\dfrac{\log_3 3}{\log_3 5^2}\right)$

$=\left(\log_3 5+\dfrac{2\log_3 5}{2}\right)\left(\dfrac{2}{\log_3 5}+\dfrac{1}{2\log_3 5}\right)$

$=2\log_3 5\times\dfrac{5}{2\log_3 5}=5$

6

$\log_{10}2=a$，$\log_{10}3=b$ とおくとき，次の値を a，b で表せ。

(1) $\log_{10}\dfrac{1}{12}$　(2) $\log_{10}15$　(3) $\log_{10}\sqrt{0.75}$

(4) $\log_2 27$　(5) $\log_{18}\sqrt[3]{24}$

7

次の値を求めよ。

(1) $10^{\log_{10}3}$　(2) $3^{-2\log_3 4}$　(3) $16^{\log_2 10}$

解説

(1) $\log_{10}\dfrac{1}{12}=-\log_{10}(2^2\times3)=-\log_{10}2^2-\log_{10}3$

$=-2\log_{10}2-\log_{10}3=-2a-b$

(2) $\log_{10}15=\log_{10}(5\times3)=\log_{10}5+\log_{10}3=\log_{10}\dfrac{10}{2}+\log_{10}3$

$=\log_{10}10-\log_{10}2+\log_{10}3=1-a+b$

(3) $\log_{10}\sqrt{0.75}=\dfrac{1}{2}\log_{10}\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{2}(\log_{10}3-\log_{10}2^2)$

$=\dfrac{1}{2}(\log_{10}3-2\log_{10}2)=\dfrac{1}{2}(b-2a)=\dfrac{b}{2}-a$

(4) $\log_2 27=\dfrac{\log_{10}27}{\log_{10}2}=\dfrac{\log_{10}3^3}{\log_{10}2}=\dfrac{3\log_{10}3}{\log_{10}2}=\dfrac{3b}{a}$

(5) $\log_{18}\sqrt[3]{24}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\log_{10}24}{\log_{10}18}=\dfrac{\log_{10}(2^3\times3)}{3\log_{10}(2\times3^2)}$

$=\dfrac{3\log_{10}2+\log_{10}3}{3(\log_{10}2+2\log_{10}3)}=\dfrac{3a+b}{3a+6b}$

解説

(1) $x=10^{\log_{10}3}$ とおいて，両辺の 10 を底とする対数をとると

$\log_{10}x=\log_{10}3\cdot\log_{10}10$　すなわち　$\log_{10}x=\log_{10}3$

よって　$x=3$

(2) $x=3^{-2\log_3 4}$ とおいて，両辺の 3 を底とする対数をとると

$\log_3 x=-2\log_3 4\cdot\log_3 3$　すなわち　$\log_3 x=\log_3 4^{-2}$

よって　$x=\dfrac{1}{16}$

(3) $x=16^{\log_2 10}$ とおいて，両辺の 2 を底とする対数をとると

$\log_2 x=\log_2 10\cdot\log_2 16$　すなわち　$\log_2 x=4\log_2 10$

ゆえに　$\log_2 x=\log_2 10^4$　よって　$x=10000$