1

全体集合 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ の部分集合 A，B を $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，$B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$ とする。次の集合を求めよ。

(1) $A\cap B$　　(2) $\overline{A}$　　(3) $\overline{B}$

(4) $\overline{A}\cap B$　　(5) $A\cap\overline{B}$　　(6) $\overline{A}\cup\overline{B}$

解説

(1) $A\cap B=\{1, 3, 5\}$

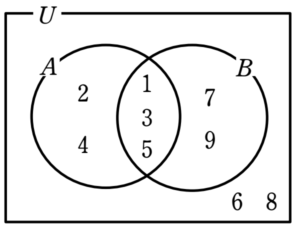
(2) $\overline{A}=\{6, 7, 8, 9\}$

(3) $\overline{B}=\{2, 4, 6, 8\}$

(4) $\overline{A}\cap B=\{7, 9\}$

(5) $A\cap\overline{B}=\{2, 4\}$

(6) $\overline{A}\cup\overline{B}=\{2, 4, 6, 7, 8, 9\}$



2

全体集合 U を 1 桁の自然数全体の集合とし，U の部分集合 A，B を $A=\{1, 3, 7, 9\}$，$B=\{3, 6, 7\}$ とする。このとき，次の個数を求めよ。

(1) $n(A)$　　(2) $n(\overline{B})$　　(3) $n(A\cap B)$　　(4) $n(A\cup B)$　　(5) $n(\overline{A\cup B})$

解説

(1) $n(A)=4$

(2) $n(U)=9$ であるから

$$n(\overline{B})=n(U)-n(B)=9-3=6$$

(3) $A\cap B=\{3, 7\}$ であるから　$n(A\cap B)=2$

(4) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=4+3-2=5$

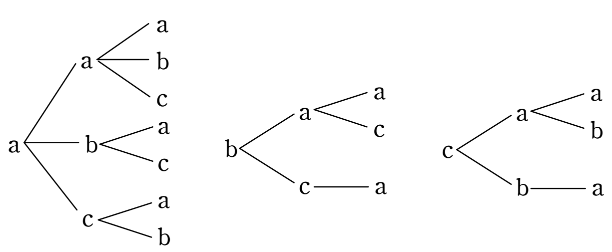
(5) $n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)=9-5=4$

3

5 個の文字 a，a，a，b，c から，3 個を選んで 1 列に並べる方法は何通りあるか。

解説

次の樹形図から　　13 通り



別解　aaa，aab，aac，aba，abc，aca，acb，baa，bac，bca，caa，cab，cba の 13 通り

4

大小 2 個のさいころを投げるとき，目の和が次のようになる場合は何通りあるか。

(1) 8　　(2) 4 または 5　　(3) 6 の倍数

解説

(1) 目の和が 8 になるのは，右の表から

5 通り

大	2	3	4	5	6
小	6	5	4	3	2

(2) [1] 目の和が 4 になるのは　3 通り

[2] 目の和が 5 になるのは　4 通り

[1]，[2] から　$3+4=7$ (通り)

[1]

大	1	2	3
小	3	2	1

[2]

大	1	2	3	4
小	4	3	2	1

(3) 目の和が 6 の倍数になるのは，和が 6 または 12 のときである。

[1] 目の和が 6 になるのは　5 通り

[2] 目の和が 12 になるのは　1 通り

[1]，[2] から　$5+1=6$ (通り)

[1]

大	1	2	3	4	5
小	5	4	3	2	1

[2]

大	6
小	6

5

次の順列の総数を求めよ。

(1) 4 人の生徒を 1 列に並べる順列

(2) ROUND の文字全部を使ってできる順列

(3) 6 個の文字 a，b，c，d，e，f から 3 個を取った順列

(4) 1 から 7 までの 7 個の数字から 4 個を取った順列

解説

(1) ${}_4P_4=4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ (通り)　　(2) ${}_5P_5=5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$ (通り)

(3) ${}_6P_3=6\cdot5\cdot4=120$ (通り)　　(4) ${}_7P_4=7\cdot6\cdot5\cdot4=840$ (通り)

6

5 個の数字 1，2，3，5，7 の中から，異なる数字を使ってできる，次のような数はいくつあるか。

(1) 5 桁の整数　　(2) 3 桁の整数　　(3) 4 桁の偶数

解説

(1) ${}_5P_5=5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$ (個)

(2) ${}_5P_3=5\cdot4\cdot3=60$ (個)

(3) 一の位の数字は 2 でなければならない。

よって，残りの 4 個の数字から 3 個を取って他の位に並べればよいから，

求める個数は　${}_4P_3=4\cdot3\cdot2=24$ (個)

7

5 か国の首相が円形のテーブルに着席して会議をする。着席の方法は何通りあるか。

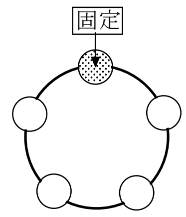
解説

右の図のように，ある 1 か国の首相の席を固定して，残りの 4 か国の首相の席を並べればよいから，着席の方法の総数は

$$(5-1)!=4!=24 \text{ (通り)}$$

別解　5 人の円順列であるから

$$(5-1)!=4!=24 \text{ (通り)}$$



8

5 人が 1 回じゃんけんをするとき，その手の出し方は何通りあるか。

解説

1 人の手の出し方は，グー，チョキ，パーの 3 通りがある。

よって　$3^5=243$ (通り)

9

(1) 8 枚の絵はがきから 5 枚を選ぶ方法は何通りあるか。

(2) 1 枚の硬貨を 10 回投げるとき，表が 3 回出る場合は何通りあるか。

解説

(1) ${}_8C_5={}_8C_3=\dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=56$ (通り)　　(2) ${}_{10}C_3=\dfrac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}=120$ (通り)

10

男子 8 人，女子 4 人の計 12 人から 5 人を選ぶとき

(1) 全部で何通りの方法があるか。

(2) 男子 3 人，女子 2 人を選ぶ方法は何通りあるか。

(3) 特定の A，B が必ず選ばれる方法は何通りあるか。

解説

(1) ${}_{12}C_5=\dfrac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=792$ (通り)

(2) ${}_8C_3\times{}_4C_2=\dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}\times\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}=336$ (通り)

(3) A と B を先に選び，残りの 10 人から 3 人を選べばよい。

よって　${}_{10}C_3=\dfrac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}=120$ (通り)

11

2 個のさいころを同時に投げるとき，次の確率を求めよ。

(1)　目の和が 4 になる確率　　(2)　目の積が奇数になる確率

(3)　目の和が素数になる確率

解説

さいころの目の出方の総数は　$6\times6=36$(通り)

(1)　目の和が 4 になる場合は　(1，3)，(2，2)，(3，1) の　3 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}$

(2)　目の積が奇数になる場合は

(1，1)，(1，3)，(1，5)，(3，1)，(3，3)，(3，5)，(5，1)，(5，3)，(5，5)

の 9 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}$

(3)　目の和が素数になる場合は

(1，1)，(1，2)，(1，4)，(1，6)，(2，1)，(2，3)，(2，5)，(3，2)，(3，4)，

(4，1)，(4，3)，(5，2)，(5，6)，(6，1)，(6，5)

の 15 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{15}{36}=\dfrac{5}{12}$

12

赤玉 4 個，白玉 6 個が入った袋から同時に 4 個の玉を取り出すとき，次の確率を求めよ。

(1)　取り出した 4 個の玉がすべて同じ色である確率

(2)　赤玉と白玉がともに取り出される確率

解説

(1)　[1]　4 個とも赤玉が出る確率は　$\dfrac{{}_4C_4}{{}_{10}C_4}=\dfrac{1}{210}$

[2]　4 個とも白玉が出る確率は　$\dfrac{{}_6C_4}{{}_{10}C_4}=\dfrac{15}{210}\left(=\dfrac{1}{14}\right)$

[1]，[2] の事象は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{1}{210}+\frac{15}{210}=\frac{16}{210}=\frac{8}{105}$$

(2)　「赤玉と白玉がともに取り出される」という事象は，「取り出した 4 個の玉がすべて同じ色である」という事象の余事象である。

よって，求める確率は　$1-\dfrac{8}{105}=\dfrac{97}{105}$

13

箱 A には当たり 2 本，はずれ 8 本の計 10 本のくじ，箱 B には当たり 3 本，はずれ 5 本の計 8 本のくじが入っている。箱 A，B から 1 本ずつくじを引くとき，当たりくじとはずれくじを引く確率を求めよ。

解説

[1]　箱 A から当たりくじを引き，箱 B からはずれくじを引く確率は

$$\frac{2}{10}\times\frac{5}{8}=\frac{10}{80}$$

[2]　箱 A からはずれくじを引き，箱 B から当たりくじを引く確率は

$$\frac{8}{10}\times\frac{3}{8}=\frac{24}{80}$$

[1]，[2] の事象は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{10}{80}+\frac{24}{80}=\frac{17}{40}$$

14

次の命題の真偽を調べよ。ただし，a は実数とする。

(1)　$a=5$ ならば $a^2=25$　　(2)　3 の倍数ならば 9 の倍数である。

(3)　$\sqrt{a^2}=a$

解説

(1)　$a=5$ ならば　$a^2=5^2=25$　　よって　真

(2)　3 は 3 の倍数であるが，9 の倍数ではない。　よって　偽

(3)　$a=-1$ のとき　$\sqrt{a^2}=\sqrt{1}=1\ (\neq -1)$　　よって　偽

15

a，b は実数とする。次の「　」内の命題の真偽を調べよ。また，$\boxed{}$ に必要，十分，必要十分のうち，最も適するものを入れよ。

(1)　「$a=-2 \Longrightarrow a^2=4$」　　$a=-2$ は $a^2=4$ であるための $\boxed{}$ 条件

(2)　「$a=b \Longrightarrow 3a=3b$」　　$a=b$ は $3a=3b$ であるための $\boxed{}$ 条件

解説

(1)　$a=-2$ ならば　$a^2=4$　　よって，命題は　真

また，命題の逆は　「$a^2=4 \Longrightarrow a=-2$」

これは　偽　反例：$a=2$

したがって　十分条件

(2)　$a=b$ の両辺に 3 をかけると　$3a=3b$

よって，命題は　真

また，命題の逆は　「$3a=3b \Longrightarrow a=b$」

$3a=3b$ のとき，両辺を 3 で割ると　$a=b$

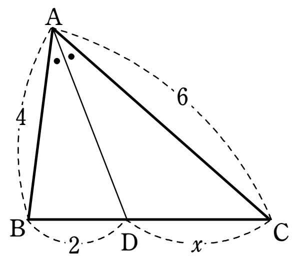
よって，逆も　真

したがって　必要十分条件

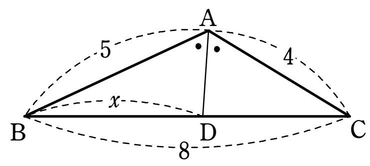
16

次の図において，x の値を求めよ。ただし，AD は ∠A の二等分線である。

(1)



(2)



解説

(1)　AB : AC＝BD : DC であるから　$4:6=2:x$

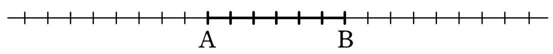
よって　$4x=12$　　したがって　$x=3$

(2)　AB : AC＝BD : DC であるから　$5:4=x:(8-x)$

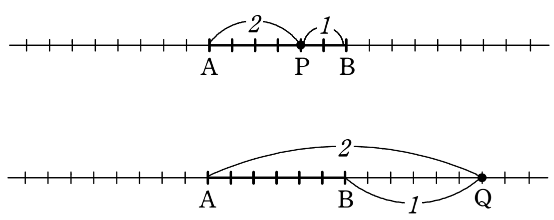
よって　$5(8-x)=4x$　　ゆえに　$x=\dfrac{40}{9}$

17

次の図において，線分 AB を 2 : 1 に内分する点 P と，2 : 1 に外分する点 Q をそれぞれ記入せよ。

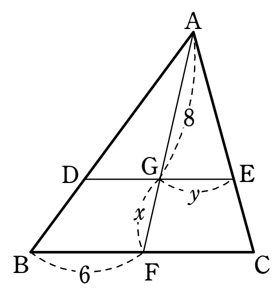


解説



18

右の図において，点 G は △ABC の重心であり，DE∥BC である。このとき，x，y の値を求めよ。



解説

重心 G は中線 AF を 2 : 1 に内分するから　$8:x=2:1$

よって　$2x=8$　　したがって　$x=4$

また，F は辺 BC の中点であるから　FC＝BF＝6

GE∥FC であるから　GE : FC＝AG : AF＝2 : 3

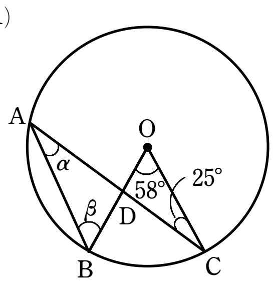
よって　$y:6=2:3$　　ゆえに　$3y=12$

したがって　$y=4$

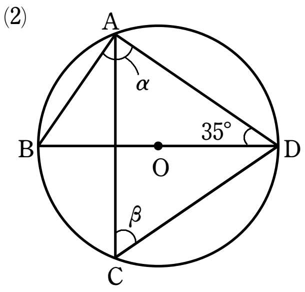
19

点 O は円の中心とする。下の図において，α，β を求めよ。

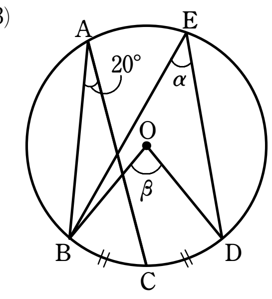
(1)



(2)



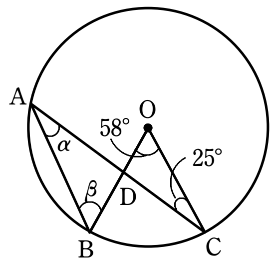
(3)



解説

(1)　円周角の定理により

$\alpha=\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{1}{2}\times58^\circ=29^\circ$　……①



△ABD において　　$\angle BDC=\alpha+\beta$

△ODC において　　$\angle BDC=58^\circ+25^\circ=83^\circ$

よって　　$\alpha+\beta=83^\circ$

これと ① から　　$\beta=83^\circ-\alpha=83^\circ-29^\circ=54^\circ$

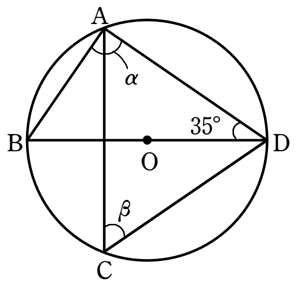
(2)　BD は円 O の直径であるから

$\alpha=90^\circ$

よって，△ABD において

$\angle B=180^\circ-(90^\circ+35^\circ)=55^\circ$

円周角の定理により　　$\beta=\angle B=55^\circ$



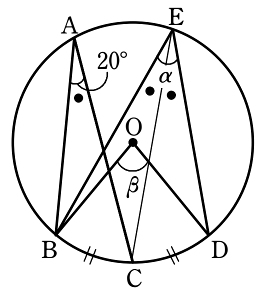
(3)　$\alpha=\angle BEC+\angle CED$

$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$　であるから

$\angle BEC=\angle CED=\angle BAC=20^\circ$

よって　　$\alpha=2\times20^\circ=40^\circ$

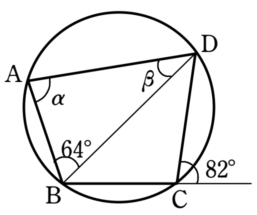
円周角の定理により　　$\beta=2\alpha=2\times40^\circ=80^\circ$



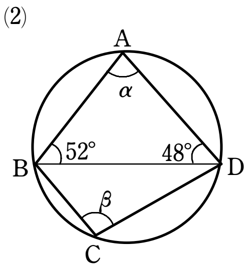
20

下の図において，α，β を求めよ。

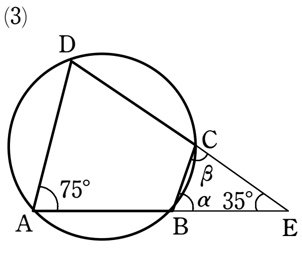
(1)



(2)



(3)



解説

(1)　四角形 ABCD は円に内接するから　　$\alpha=82^\circ$

△ABD において　　$\beta=180^\circ-(82^\circ+64^\circ)=34^\circ$

(2)　△ABD において　　$\alpha=180^\circ-(52^\circ+48^\circ)=80^\circ$

四角形 ABCD は円に内接するから　　$\beta=180^\circ-\alpha=180^\circ-80^\circ=100^\circ$

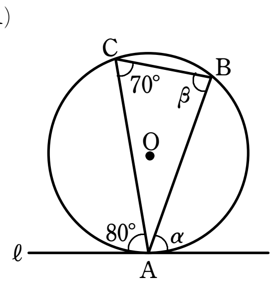
(3)　四角形 ABCD は円に内接するから　　$\beta=75^\circ$

△BEC において　　$\alpha=180^\circ-(75^\circ+35^\circ)=70^\circ$

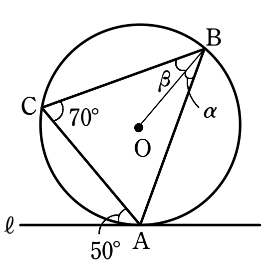
21

下の図において，直線 ℓ は円 O の接線で，A は接点である。α，β を求めよ。

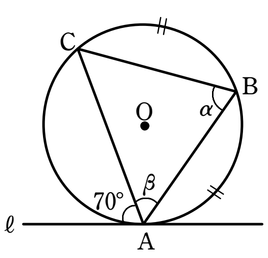
(1)



(2)



(3)



解説

(1)　接線と弦の作る角の定理により　　$\alpha=70^\circ$，$\beta=80^\circ$

(2)　2 点 O，A を結ぶ。

円周角の定理により　　$\angle AOB=2\angle C=2\times70^\circ=140^\circ$

OA＝OB であるから　　$\angle OAB=\angle OBA=\alpha$

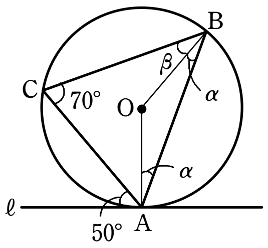
よって，△OAB において　　$140^\circ+\alpha+\alpha=180^\circ$

ゆえに　　$\alpha=20^\circ$　……①

また，接線と弦の作る角の定理により　　$\angle B=50^\circ$

すなわち　　$\alpha+\beta=50^\circ$

これと ① から　　$\beta=50^\circ-\alpha=50^\circ-20^\circ=30^\circ$



(3)　接線と弦の作る角の定理により　　$\alpha=70^\circ$　……①

$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$ であるから　　$\angle BCA=\angle CAB=\beta$

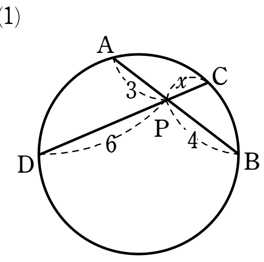
よって，△ABC において　　$\alpha+\beta+\beta=180^\circ$

これと ① から　　$70^\circ+\beta+\beta=180^\circ$　　　したがって　　$\beta=55^\circ$

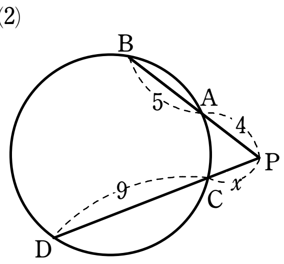
22

下の図の x の値を求めよ。

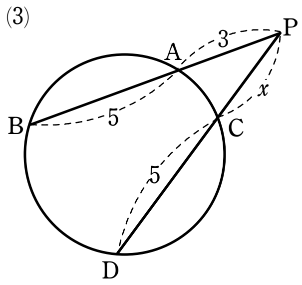
(1)



(2)



(3)



解説

(1)　方べきの定理により　　$PA\cdot PB=PC\cdot PD$

よって　　$3\cdot4=x\cdot6$　　　したがって　　$x=2$

(2)　方べきの定理により　　$PA\cdot PB=PC\cdot PD$

よって　　$4\cdot(4+5)=x(x+9)$

ゆえに　　$x^2+9x-36=0$　すなわち　$(x+12)(x-3)=0$

$x>0$ であるから　　$x=3$

(3)　方べきの定理により　　$PA\cdot PB=PC\cdot PD$

よって　　$3\cdot(3+5)=x(x+5)$

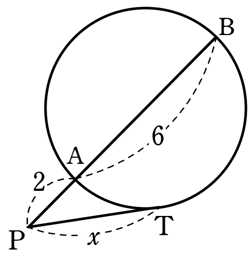
ゆえに　　$x^2+5x-24=0$　すなわち　$(x+8)(x-3)=0$

$x>0$ であるから　　$x=3$

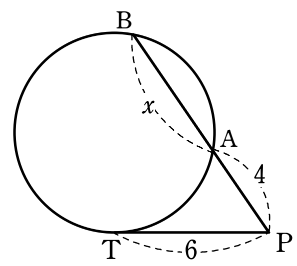
23

下の図において，直線 PT が点 T で円に接するとき，x の値を求めよ。

(1)



(2)



解説

(1)　方べきの定理により　　$PA\cdot PB=PT^2$

よって　　$2\cdot(2+6)=x^2$　すなわち　$x^2=16$

$x>0$ であるから　　$x=4$

(2)　方べきの定理により　　$PA\cdot PB=PT^2$

よって　　$4(x+4)=6^2$　すなわち　$4(x+4)=36$

ゆえに　　$x+4=9$　　　したがって　　$x=5$