1 数列の極限(1)

一般項が次の式で表される数列の極限を求めよ。

(1) $\dfrac{6n}{\sqrt{n^2+2n}+n}$　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n}}$　　(3) $\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2})$

(4) $\log_2 \sqrt[n]{3}$　　(5) $\cos n\pi$

2 数列の極限(2)

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3+7+11+\cdots\cdots+(4n-1)}{5+7+9+\cdots\cdots+(2n+3)}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{\log_3(1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2)-\log_3 n^3\}$

3 数列の極限(3)

一般項が次の式で表される数列の極限を求めよ。

(1) $3\left(-\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$　　(2) $5^n-(-3)^n$　　(3) $\dfrac{3^{n+1}-2^n}{3^n+2^n}$　　(4) $\dfrac{r^n}{2+r^{n+1}}$ $(r>-1)$

4 はさみうちの原理(1)

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}$ を求めよ。

(2) $a_n=\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{1}{n^2+2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n^2+n}$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

5 はさみうちの原理(2)

実数xに対し，xを超えない最大の整数を$[x]$とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{[\sqrt{2}\,n]}{n}$を求めよ。

6 はさみうちの原理(3)

数列$\{a_n\}$を$\begin{cases}a_1=0\\ a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}\ \ (n=1,\ 2,\ \cdots)\end{cases}$によって定義する。

(1) 方程式$x=\sqrt{x+2}$ の実数解αを求めよ。

(2) (1)で求めたαに対して，不等式

$$|a_{n+1}-\alpha|\leqq\frac{1}{2}|a_n-\alpha|\ \ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

が成り立つことを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$を求めよ。

7 無限等比数列の極限(1)

次の無限等比数列について，極限を調べよ。

(1) $1,\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{9},\ -\dfrac{1}{27},\ \cdots$

(2) $\sqrt{3},\ 3,\ 3\sqrt{3},\ 9,\ \cdots$

8 無限等比数列の収束条件

無限等比数列$\{(5-x^2)^n\}$が収束するxの値の範囲を求めよ。また，そのときの数列の極限値を求めよ。

9 r^nを含む極限

$r\neq-1$のとき，数列$\left\{\dfrac{r^n-1}{r^n+1}\right\}$の極限を調べよ。

10 漸化式で定められる数列の極限値

次の条件によって定められる数列$\{a_n\}$の極限を求めよ。

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+1$　　(2) $a_1=0,\ a_2=1,\ a_{n+2}=\dfrac{1}{4}(a_{n+1}+3a_n)$

11 無限級数

次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$

(2) $1+(-1)+1+(-1)+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots\cdots$

12 無限等比級数の収束・発散

次の無限等比級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots$　　(2) $2+3+\dfrac{9}{2}+\cdots$　　(3) $4-2\sqrt{3}+3\ \cdots$

13 無限等比級数

次の無限等比級数について答えよ。

$x+x(x+1)+x(x+1)^2+\cdots\cdots+x(x+1)^{n-1}+\cdots\cdots$　　…①

(1) ①が収束するためのxについての条件を求めよ。

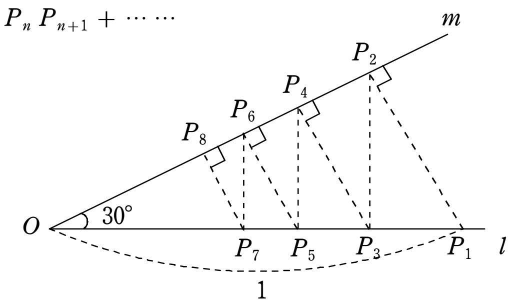
(2) (1)で求めたxに対し，①の和を$f(x)$とおくとき，関数$y=f(x)$のグラフをかけ。

14 図形の無限級数

下図のように，直線l上の点P_1から直線mへひいた垂線の足をP_2，m上のP_2からlへひいた垂線の足をP_3とし，以下同様に垂線をひくことによってP_4，P_5，P_6，… を定めていく。$OP_1=1$とするとき，無限級数

$P_1P_2+P_2P_3+P_3P_4+\cdots\cdots+P_nP_{n+1}+\cdots\cdots$

の和を求めよ。



15 $\{S_n\}$が収束する ならば $a_n\to0$

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$を求めよ。

(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ …① が収束するとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(a_n+1)}$ …② は発散することを示せ。

16 関数の極限(1)

次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^3-3x-2}{x^2-3x+2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{3}{x+3}-1\right)$　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$

17 極限値が存在するための定数の決定

次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

$$\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x+1}-b}{x-1}=\sqrt{2}$$

18 関数の極限(2)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{x-2}{x-1}$，$\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{x-2}{x-1}$ を求めよ。

(2) $x\longrightarrow0$ のとき，関数 $\dfrac{x^2-x}{|x|}$ の極限は存在するかどうかを調べよ。

19 関数の極限(3)

次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x^3-3x^2+5)$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+4x-1}{2x^2-3}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x}-x)$　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{4^x}{3^x+2^x}$

20 関数の極限(4)

次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\log_3 x+\log_3(\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-1})\right\}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x}+x)$

21 関数の極限(5)

次の極限値を求めよ。ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{[3x]}{x}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(3^x+5^x)^{\frac{1}{x}}$

22 **三角関数の極限**(1)

次の極限値を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$　　(2)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x^\circ}{x}$　　(3)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}$

23 **三角関数の極限**(2)

次の極限値を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi}$　　(2)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$　　(3)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}$

24 **関数の連続性**

$-1\leqq x\leqq 2$ とする。次の関数の連続性について調べよ。

(1)　$f(x)=\begin{cases}x^2 & (x\fallingdotseq 0)\\ 1 & (x=0)\end{cases}$　　(2)　$g(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$　$(x\fallingdotseq 1)$,　$g(1)=0$

(3)　$h(x)=[x]$　ただし，[　] はガウス記号とする。

25 **左，右の極限と関数の連続性**

xの関数$f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{x+x^n}$　$(x>-1,\ x\fallingdotseq 0)$ について答えよ。

(1) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$の値を求めよ。

(2) $y=f(x)$のグラフをかけ。