1

(1) の式を計算せよ。また，(2) ～ (4) の式を展開せよ。

(1)　$(-xy)^3(-2xy^2)^2$　　(2)　$(x-1)(x^2-2x+1)$

(3)　$(x^2-3x+1)(x^2-1)$　　(4)　$(2a^2-3ab+b^2)(a^3+2a^2b-b^3)$

ヒント

指数法則　$a^m a^n=a^{m+n}$，$(a^m)^n=a^{mn}$，$(ab)^m=a^m b^n$

解説

(1)　$(与式)=(-1)^3x^3y^3\cdot(-2)^2x^2y^4=(-1\cdot4)x^{3+2}y^{3+4}=-4x^5y^7$

(2)　$(与式)=(x-1)\cdot x^2+(x-1)\cdot(-2x)+(x-1)\cdot1$
$=x^3-x^2-2x^2+2x+x-1$
$=x^3+(-1-2)x^2+(2+1)x-1$
$=x^3-3x^2+3x-1$

(3)　$(与式)=(x^2-3x+1)\cdot x^2+(x^2-3x+1)\cdot(-1)$
$=x^4-3x^3+x^2-x^2+3x-1$
$=x^4-3x^3+(1-1)x^2+3x-1$
$=x^4-3x^3+3x-1$

(4)　$(与式)=(2a^2-3ab+b^2)\cdot a^3+(2a^2-3ab+b^2)\cdot 2a^2b+(2a^2-3ab+b^2)\cdot(-b^3)$
$=2a^5-3a^4b+a^3b^2+4a^4b-6a^3b^2+2a^2b^3-2a^2b^3+3ab^4-b^5$
$=2a^5+(-3+4)a^4b+(1-6)a^3b^2+(2-2)a^2b^3+3ab^4-b^5$
$=2a^5+a^4b-5a^3b^2+3ab^4-b^5$

2

次の式を展開せよ。

(1)　$(-2x+3y)^2$　　(2)　$(2a-3b)(2a+3b)$　　(3)　$(5x+3y)(2x-7y)$

(4)　$(a-3b)(a^2+3ab+9b^2)$　　(5)　$(3a-5b)^3$

ヒント

乗法公式

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$，$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$，$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

解説

(1)　$(与式)=(-2x)^2+2\cdot(-2x)\cdot3y+(3y)^2=4x^2-12xy+9y^2$

(2)　$(与式)=(2a)^2-(3b)^2=4a^2-9b^2$

(3)　$(与式)=5\cdot2x^2+\{5\cdot(-7y)+3y\cdot2\}x+3y\cdot(-7y)=10x^2-29xy-21y^2$

(4)　$(与式)=(a-3b)\{a^2+a\cdot3b+(3b)^2\}=a^3-(3b)^3=a^3-27b^3$

(5)　$(与式)=(3a)^3-3\cdot(3a)^2\cdot5b+3\cdot3a\cdot(5b)^2-(5b)^3=27a^3-135a^2b+225ab^2-125b^3$

3

次の式を因数分解せよ。

(1)　$8a^2b+18bc^2-24abc$　　(2)　$a(x-2y)+b(2y-x)$

(3)　$a^2-7ab-18b^2$　　(4)　$8x^3y-18xy^3$

解説

(1)　$8a^2b+18bc^2-24abc=2b(4a^2+9c^2-12ac)$
$=2b(4a^2-12ac+9c^2)$
$=2b(2a-3c)^2$

(2)　$a(x-2y)+b(2y-x)=a(x-2y)-b(x-2y)$
$=(a-b)(x-2y)$

(3)　$a^2-7ab-18b^2=a^2+(2b-9b)a+2b\cdot(-9b)$
$=(a+2b)(a-9b)$

(4)　$8x^3y-18xy^3=2xy\cdot4x^2-2xy\cdot9y^2$
$=2xy(4x^2-9y^2)$
$=2xy(2x+3y)(2x-3y)$

4

次の式を因数分解せよ。

(1)　$12x^2+x-6$　　(2)　$6x^2-13xy-5y^2$

(3)　x^4-8xy^3　　(4)　$x^2-4xy+4y^2-4z^2$

解説

(1)　$12x^2+x-6=(3x-2)(4x+3)$

$$\begin{array}{ccccc} 3 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & -2 & \longrightarrow & -8 \\ 4 & & 3 & \longrightarrow & 9 \\ \hline 12 & & -6 & & 1 \end{array}$$

(2)　$6x^2-13xy-5y^2=(2x-5y)(3x+y)$

$$\begin{array}{ccccc} 2 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & -5y & \longrightarrow & -15y \\ 3 & & y & \longrightarrow & 2y \\ \hline 6 & & -5y^2 & & -13y \end{array}$$

(3)　$x^4-8xy^3=x(x^3-8y^3)=x\{x^3-(2y)^3\}$
$=x(x-2y)\{x^2+x\cdot2y+(2y)^2\}$
$=x(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$

(4)　$x^2-4xy+4y^2-4z^2=(x^2-4xy+4y^2)-4z^2$
$=(x-2y)^2-(2z)^2$
$=(x-2y+2z)(x-2y-2z)$

5

a が次の値をとるとき，$|a+2|+|3-2a|$ の値を求めよ。

(1)　$a=-3$　　(2)　$a=-1$　　(3)　$a=2$　　(4)　$a=5$

ヒント

絶対値　$|a|=\begin{cases} a & (a\geqq0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$

解説

(1)　$|-3+2|+|3-2\cdot(-3)|=|-1|+|9|=1+9=10$

(2)　$|-1+2|+|3-2\cdot(-1)|=|1|+|5|=1+5=6$

(3)　$|2+2|+|3-2\cdot2|=|4|+|-1|=4+1=5$

(4)　$|5+2|+|3-2\cdot5|=|7|+|-7|=7+7=14$

6

次の計算をせよ。(3)，(4) は分母を有理化せよ。

(1)　$\sqrt{20}-(\sqrt{45}-4\sqrt{5})$　　(2)　$(\sqrt{27}-\sqrt{18})(\sqrt{12}-\sqrt{8})$

(3)　$\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$　　(4)　$\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

解説

(1)　$\sqrt{20}-(\sqrt{45}-4\sqrt{5})=\sqrt{2^2\cdot5}-\sqrt{3^2\cdot5}+4\sqrt{5}=2\sqrt{5}-3\sqrt{5}+4\sqrt{5}$
$=(2-3+4)\sqrt{5}=3\sqrt{5}$

(2)　$(\sqrt{27}-\sqrt{18})(\sqrt{12}-\sqrt{8})=(\sqrt{3^2\cdot3}-\sqrt{3^2\cdot2})(\sqrt{2^2\cdot3}-\sqrt{2^2\cdot2})$
$=(3\sqrt{3}-3\sqrt{2})(2\sqrt{3}-2\sqrt{2})$
$=3\cdot2(\sqrt{3})^2+\{3\cdot(-2)+(-3)\cdot2\}\sqrt{3}\sqrt{2}+(-3)(-2)(\sqrt{2})^2$
$=6\cdot3-12\sqrt{6}+6\cdot2$
$=30-12\sqrt{6}$

別解　$(\sqrt{27}-\sqrt{18})(\sqrt{12}-\sqrt{8})=(\sqrt{3^2\cdot3}-\sqrt{3^2\cdot2})(\sqrt{2^2\cdot3}-\sqrt{2^2\cdot2})$
$=(3\sqrt{3}-3\sqrt{2})(2\sqrt{3}-2\sqrt{2})$
$=3(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$
$=3\cdot2(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$
$=6\{(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2\}$
$=6(5-2\sqrt{6})$
$=30-12\sqrt{6}$

(3)　$\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}=-\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$

(4)　$\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\dfrac{(2-\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=\dfrac{4-4\sqrt{3}+3}{2^2-(\sqrt{3})^2}=7-4\sqrt{3}$

7

$a=\sqrt{6}+\sqrt{5}+1$，$b=\sqrt{6}-\sqrt{5}+1$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　ab　　(2)　$\dfrac{a^2-b^2}{ab}$　　(3)　$\dfrac{1}{a}$

解説

(1)　$ab=\{(\sqrt{6}+1)+\sqrt{5}\}\{(\sqrt{6}+1)-\sqrt{5}\}=(\sqrt{6}+1)^2-(\sqrt{5})^2$
$=(6+2\sqrt{6}+1)-5=2+2\sqrt{6}$

(2)　$a+b=2+2\sqrt{6}$，$a-b=2\sqrt{5}$，$ab=2+2\sqrt{6}$ であるから

$\dfrac{a^2-b^2}{ab}=\dfrac{(a+b)(a-b)}{ab}=\dfrac{(2+2\sqrt{6})(2\sqrt{5})}{2+2\sqrt{6}}=2\sqrt{5}$

(3)　(1) の結果を利用して

$\dfrac{1}{a}=\dfrac{\sqrt{6}+1-\sqrt{5}}{(\sqrt{6}+1+\sqrt{5})(\sqrt{6}+1-\sqrt{5})}=\dfrac{\sqrt{6}+1-\sqrt{5}}{2(\sqrt{6}+1)}$

$=\dfrac{(\sqrt{6}+1-\sqrt{5})(\sqrt{6}-1)}{2(\sqrt{6}+1)(\sqrt{6}-1)}=\dfrac{6-\sqrt{6}+\sqrt{6}-1-\sqrt{30}+\sqrt{5}}{2\{(\sqrt{6})^2-1^2\}}$

$=\dfrac{5-\sqrt{30}+\sqrt{5}}{2\cdot5}=\dfrac{5-\sqrt{30}+\sqrt{5}}{10}$

8

$\sqrt{7}$ の小数部分を a とするとき，次の式の値を求めよ。

(1) $a+\dfrac{1}{a}$　　(2) a^2+4a-7　　(3) a^3+4a^2-2a+2

解説

$2<\sqrt{7}<3$ であるから　$a=\sqrt{7}-2$

(1) $\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{7}-2}=\dfrac{\sqrt{7}+2}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}=\dfrac{\sqrt{7}+2}{7-4}=\dfrac{\sqrt{7}+2}{3}$ であるから

$a+\dfrac{1}{a}=\sqrt{7}-2+\dfrac{\sqrt{7}+2}{3}=\dfrac{3(\sqrt{7}-2)+\sqrt{7}+2}{3}=\dfrac{4\sqrt{7}-4}{3}$

(2) $a^2+4a-7=a(a+4)-7=(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)-7$

$=(\sqrt{7})^2-2^2-7=-4$

別解　$a=\sqrt{7}-2$ から　$a+2=\sqrt{7}$

両辺を２乗して　$(a+2)^2=(\sqrt{7})^2$　すなわち　$a^2+4a+4=7$

よって　$a^2+4a-7=-4$

(3) (2) より，$a^2+4a-3=0$ であるから

$a^3+4a^2-2a+2=a(a^2+4a-3)+a+2$

$=(\sqrt{7}-2)\cdot 0+(\sqrt{7}-2)+2=\sqrt{7}$

9

次の１次不等式，連立不等式を解け。

(1) $2x-1\leqq\dfrac{x+1}{3}$　　(2) $\dfrac{2}{5}x-0.7>-1+0.5x$　　(3) $\begin{cases}8(x+2)>5x+1\\-3(2x+3)\geqq 5(x-4)\end{cases}$

ヒント

不等式は両辺に－の数を掛けたり割ったりすると、不等号の向きが変わる。

例　$-2x\geqq 4 \implies x\leqq -2$

解説

(1) 両辺に３をかけて　$3(2x-1)\leqq x+1$　ゆえに　$6x-3\leqq x+1$

整理すると　$5x\leqq 4$　よって　$x\leqq\dfrac{4}{5}$

(2) 両辺に 10 をかけて　$4x-7>-10+5x$

整理すると　$-x>-3$　よって　$x<3$

(3) $8(x+2)>5x+1$ から　$8x+16>5x+1$

整理すると　$3x>-15$

よって　$x>-5$　……①

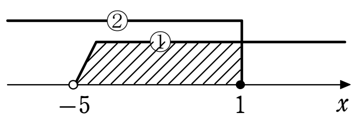
$-3(2x+3)\geqq 5(x-4)$ から　$-6x-9\geqq 5x-20$

整理すると　$-11x\geqq -11$

よって　$x\leqq 1$　……②

① と ② の共通範囲を求めて

$-5<x\leqq 1$



10

次の方程式，不等式を解け。

(1) $|3x-2|=1$　　(2) $|2x+5|<3$　　(3) $|3-4x|\geqq 5$

ヒント

絶対値と方程式･不等式　$(a>0)$

$|x|=a \iff x=\pm a$

$|x|<a \iff -a<x<a$

$|x|>a \iff x<-a,\ a<x$

例　$|x|=4,\iff x=\pm 2$

解説

(1) $|3x-2|=1$ から　$3x-2=1$ または $3x-2=-1$

$3x-2=1$ から　$x=1$,　$3x-2=-1$ から　$x=\dfrac{1}{3}$

したがって　$x=1,\ \dfrac{1}{3}$

(2) $|2x+5|<3$ から　$-3<2x+5<3$　よって　$-4<x<-1$

(3) $|3-4x|\geqq 5$ から　$3-4x\leqq -5$ または $5\leqq 3-4x$

ゆえに　$-4x\leqq -8$ または $4x\leqq -2$　よって　$x\geqq 2,\ x\leqq -\dfrac{1}{2}$

すなわち　$x\leqq -\dfrac{1}{2},\ 2\leqq x$

11

次の２次方程式を解け。

(1) $x^2-4x-2=0$　　(2) $2x^2-10x+1=0$　　(3) $3x^2+7x+2=0$

(4) $-2x^2+4x+3=0$　　(5) $6x^2-7x-3=0$　　(6) $4x-1-3x^2=0$

ヒント

2次方程式の解　$(x-\alpha)(x-\beta)=0,\iff x=\alpha,\ \beta$

2次方程式の解の公式

$ax^2+bx+c=0,\ x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$ax^2+2b'x+c=0,\ x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$　（xの係数が偶数のとき）

解説

(1) 解の公式により

$x=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1}=\dfrac{4\pm\sqrt{24}}{2}=\dfrac{4\pm 2\sqrt{6}}{2}=2\pm\sqrt{6}$

別解　$x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot(-2)}}{1}=2\pm\sqrt{6}$

(2) 解の公式により

$x=\dfrac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot 2\cdot 1}}{2\cdot 2}=\dfrac{10\pm\sqrt{92}}{4}=\dfrac{10\pm 2\sqrt{23}}{4}=\dfrac{5\pm\sqrt{23}}{2}$

別解　$x=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-2\cdot 1}}{2}=\dfrac{5\pm\sqrt{23}}{2}$

(3) 左辺を因数分解して　$(x+2)(3x+1)=0$

よって　$x=-2,\ -\dfrac{1}{3}$

(4) 両辺に -1 をかけて　$2x^2-4x-3=0$

解の公式により

$x=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 2\cdot(-3)}}{2\cdot 2}=\dfrac{4\pm\sqrt{40}}{4}=\dfrac{4\pm 2\sqrt{10}}{4}=\dfrac{2\pm\sqrt{10}}{2}$

別解　$x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-2\cdot(-3)}}{2}=\dfrac{2\pm\sqrt{10}}{2}$

(5) 左辺を因数分解して　$(2x-3)(3x+1)=0$

よって　$x=\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{1}{3}$

(6) 両辺に -1 をかけて　$3x^2-4x+1=0$

左辺を因数分解して　$(x-1)(3x-1)=0$

よって　$x=1,\ \dfrac{1}{3}$

12

(1) ２次方程式 $x^2+ax-10=0$ の解の１つが２である。このとき，定数 a の値と他の解を求めよ。

(2) ２次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解が -3 と４のとき，定数 a，b の値を求めよ。

解説

(1) この方程式が $x=2$ を解にもつから，次の等式が成り立つ。

$2^2+a\cdot 2-10=0$　すなわち　$2a-6=0$

これを解いて　$a=3$

$a=3$ を方程式に代入して　$x^2+3x-10=0$

ゆえに　$(x-2)(x+5)=0$　よって　$x=2,\ -5$

したがって，他の解は　$x=-5$

(2) この方程式が $x=-3$ と $x=4$ を解にもつから，次の等式が成り立つ。

$(-3)^2+a(-3)+b=0,\ 4^2+a\cdot 4+b=0$

すなわち　$-3a+b+9=0,\quad 4a+b+16=0$

この連立方程式を解いて　$a=-1,\ b=-12$

13

次の条件を満たすように，定数 m の値の範囲を定めよ。

(1)　2 次方程式 $x^2+5x+m=0$ が異なる 2 つの実数の解をもつ。

(2)　2 次方程式 $2x^2-3x+m-1=0$ が実数の解をもたない。

(3)　2 次方程式 $3x^2+6x+2m-1=0$ が実数の解をもつ。

ヒント

2次方程式の解の判別（判別式D）

2次方程式$ax^2+bx+c=0$において，判別式を$D=b^2-4ac$とすると

$D>0$ ⇔ 異なる2つの実数解をもつ

$D=0$ ⇔ **重解をもつ**

$D<0$ ⇔ **実数解をもたない**　　（特に $D\geqq 0$ ⇔ 実数解をもつ）

解説

(1)　この方程式が異なる 2 つの解をもつための条件は，係数について

$$5^2-4\cdot 1\cdot m>0 \qquad \text{すなわち} \qquad 25-4m>0$$

これを解いて　$m<\dfrac{25}{4}$

(2)　この方程式が解をもたないための条件は，係数について

$$(-3)^2-4\cdot 2\cdot (m-1)<0 \qquad \text{すなわち} \qquad -8m+17<0$$

これを解いて　$m>\dfrac{17}{8}$

(3)　この方程式が解をもつための条件は，係数について

$$6^2-4\cdot 3\cdot (2m-1)\geqq 0 \qquad \text{すなわち} \qquad -24m+48\geqq 0$$

これを解いて　$m\leqq 2$

14

次の 2 次関数のグラフをかけ。また，その頂点と軸を求めよ。

(1)　$y=x^2-4$　　(2)　$y=-2x^2-8x-5$　　(3)　$y=2x^2-6x+3$

ヒント

$y=ax^2+bx+c$ のグラフ

平方完成をすると　$y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$　**なので**

軸$x=-\dfrac{b}{2a}$，頂点$\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$

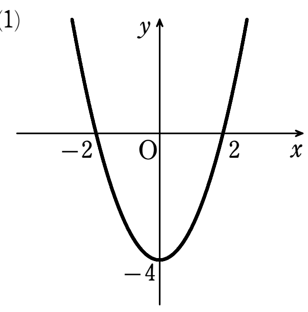
解説

(1)　グラフは［図］。

頂点は　点 $(0,\ -4)$，

軸は　直線 $x=0$

(1)



(2)　$y=-2x^2-8x-5$

$=-2(x^2+2\cdot 2x+2^2)+2\cdot 2^2-5$

$=-2(x+2)^2+3$

よって，グラフは［図］。

頂点は　点 $(-2,\ 3)$，

軸は　直線 $x=-2$

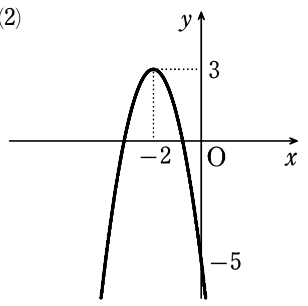
(3)　$y=2x^2-6x+3=2(x^2-3x)+3=2\left\{x^2-2\cdot\dfrac{3}{2}x+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\right\}-2\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+3$

$=2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{3}{2}$

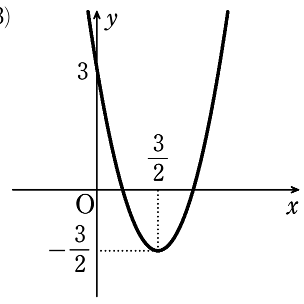
よって，グラフは［図］。

頂点は　点 $\left(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{3}{2}\right)$，軸は　直線 $x=\dfrac{3}{2}$

(2)



(3)



15

次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=x^2-4x+5$　$(0\leqq x\leqq 3)$　　(2)　$y=-x^2-x+2$　$(-2<x<0)$

解説

(1)　$y=x^2-4x+5$

$=(x^2-2\cdot 2x+2^2)-2^2+5$

$=(x-2)^2+1$　$(0\leqq x\leqq 3)$

よって，グラフは右の図の実線部分である。

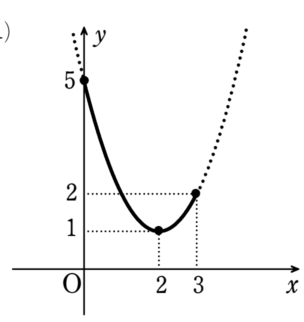
したがって，

$x=0$ のとき最大値 5，

$x=2$ のとき最小値 1

をとる。

(1)



(2)　$y=-x^2-x+2$

$=-\left\{x^2+2\cdot\dfrac{1}{2}x+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right\}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+2$

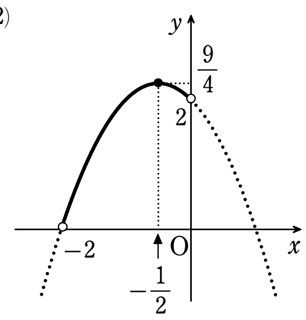
$=-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$　$(-2<x<0)$

よって，グラフは右の図の実線部分である。

したがって，$x=-\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{9}{4}$ をとる。

最小値はない。

(2)



16

次の条件を満たす放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ。

(1)　頂点が点 $(1,\ 2)$ で，点 $(0,\ 4)$ を通る。

(2)　直線 $x=-3$ を軸とし，2 点 $(-2,\ 0)$，$(1,\ -15)$ を通る。

ヒント

2次関数のおき方

①通る3点の座標がわかっているとき

$y=ax^2+bx+c$

②頂点についての条件が与えられているとき

頂点**の座標が**$(p,\ q)$のとき、$y=a(x-p)^2+q$

③x軸との交点のx座標がα，βのとき

$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$

解説

(1)　頂点が点 $(1,\ 2)$ であるから，求める 2 次関数は $y=a(x-1)^2+2$ とおける。

このグラフが点 $(0,\ 4)$ を通るから　$a+2=4$　ゆえに　$a=2$

よって，求める 2 次関数は

$$y=2(x-1)^2+2 \qquad \text{すなわち} \qquad y=2x^2-4x+4$$

(2)　軸が直線 $x=-3$ であるから，求める 2 次関数は $y=a(x+3)^2+q$ とおける。

このグラフが 2 点 $(-2,\ 0)$，$(1,\ -15)$ を通るから

$$a+q=0,\quad 16a+q=-15 \qquad \text{これを解いて} \quad a=-1,\ q=1$$

よって，求める 2 次関数は

$$y=-(x+3)^2+1 \qquad \text{すなわち} \qquad y=-x^2-6x-8$$

17

次の 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の座標を求めよ。

(1)　$y=-x^2+7x-12$　　(2)　$y=25x^2-20x+4$

(3)　$y=5x^2-14x-3$　　(4)　$y=x^2-4x-7$

ヒント

$y=ax^2+bx+c$ とx軸$(y=0)$との交点のx座標

⇔ $ax^2+bx+c=0$ の解

解説

(1)　共有点の x 座標は，2 次方程式 $-x^2+7x-12=0$ の解である。

両辺に -1 をかけて　$x^2-7x+12=0$

左辺を因数分解すると　$(x-3)(x-4)=0$　ゆえに　$x=3,\ 4$

よって，求める座標は　$(3,\ 0)$，$(4,\ 0)$

(2)　共有点の x 座標は，2 次方程式 $25x^2-20x+4=0$ の解である。

左辺を因数分解すると　$(5x-2)^2=0$　ゆえに　$x=\dfrac{2}{5}$

よって，求める座標は　$\left(\dfrac{2}{5},\ 0\right)$

(3)　共有点の x 座標は，2 次方程式 $5x^2-14x-3=0$ の解である。

左辺を因数分解すると　$(x-3)(5x+1)=0$

ゆえに　$x=3,\ -\dfrac{1}{5}$

よって，求める座標は　$(3,\ 0)$，$\left(-\dfrac{1}{5},\ 0\right)$

(4)　共有点の x 座標は，2 次方程式 $x^2-4x-7=0$ の解である。

これを解くと　$x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot(-7)}}{1}=2\pm\sqrt{11}$

よって，求める座標は　$(2-\sqrt{11},\ 0)$，$(2+\sqrt{11},\ 0)$

18

次の２次不等式を解け。

(1)　$x^2-2x-24<0$　　(2)　$2x^2\geqq 7x-3$　　(3)　$-2x^2-3x+3\geqq 0$

(4)　$-3x^2<10-6x$　　(5)　$x^2<8(x-3)$　　(6)　$2(x^2+2)\leqq x(x-4)$

ヒント

$(x-\alpha)(x-\beta)>0 \iff x<\alpha,\ x<\beta$

$(x-\alpha)(x-\beta)<0 \iff \alpha<x<\beta$　　$(\alpha<\beta)$

2次不等式は基本的に2次関数を書いて考える。

因数分解できない場合は解の公式。

解の公式で実数解にならない場合はグラフで考える。

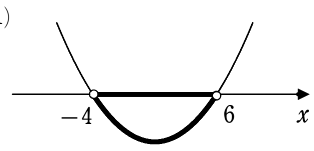
解説

(1)　$x^2-2x-24<0$ から　$(x+4)(x-6)<0$　　よって　$-4<x<6$

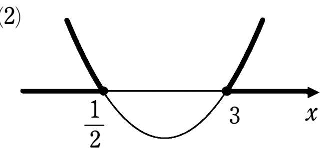
(2)　整理すると　$2x^2-7x+3\geqq 0$　　ゆえに　$(2x-1)(x-3)\geqq 0$

よって，与えられた不等式の解は　$x\leqq \dfrac{1}{2},\ 3\leqq x$

(1)



(2)



(3)　両辺に -1 をかけて　$2x^2+3x-3\leqq 0$

$2x^2+3x-3=0$ を解くと　$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{33}}{4}$

よって，与えられた不等式の解は　$\dfrac{-3-\sqrt{33}}{4}\leqq x\leqq \dfrac{-3+\sqrt{33}}{4}$

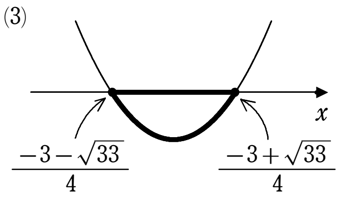
(4)　整理すると　$-3x^2+6x-10<0$

両辺に -1 をかけて　$3x^2-6x+10>0$

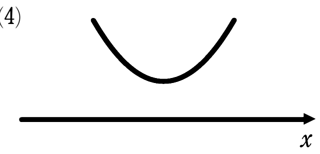
係数について　$(-6)^2-4\cdot 3\cdot 10=-84<0$

よって，与えられた不等式の解は　すべての実数

(3)



(4)



(5)　整理すると　$x^2-8x+24<0$

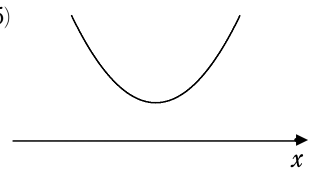
係数について　$(-8)^2-4\cdot 1\cdot 24=-32<0$

よって，与えられた不等式の解はない。

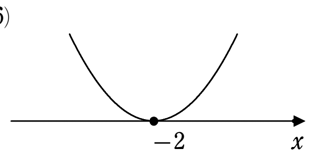
(6)　整理すると　$x^2+4x+4\leqq 0$　　ゆえに　$(x+2)^2\leqq 0$

よって，与えられた不等式の解は　$x=-2$

(5)



(6)



19

次の条件を満たすように，定数 m の値の範囲を定めよ。

(1)　2 次方程式 $x^2+mx+m=0$ が異なる 2 つの実数の解をもつ。

(2)　2 次方程式 $x^2+(m-1)x+2m-1=0$ が実数の解をもたない。

(3)　2 次方程式 $x^2-mx-m+8=0$ が実数の解をもつ。

ヒント

2次方程式の解の判別（判別式D）

2次方程式$ax^2+bx+c=0$において，判別式を$D=b^2-4ac$とすると

$D>0 \iff$ 異なる2つの実数解をもつ

$D=0 \iff$ **重解をもつ**

$D<0 \iff$ **実数解をもたない**　（特に $D\geqq 0 \iff$ 実数解をもつ）

解説

(1)　この方程式が異なる 2 つの実数の解をもつための条件は，係数について

$m^2-4\cdot 1\cdot m>0$　すなわち　$m(m-4)>0$

よって，求める m の値の範囲は　$m<0,\ 4<m$

(2)　この方程式が実数の解をもたないための条件は，係数について

$(m-1)^2-4\cdot 1\cdot(2m-1)<0$　すなわち　$m^2-10m+5<0$

$m^2-10m+5=0$ を解くと　$m=5\pm 2\sqrt{5}$

よって，求める m の値の範囲は　$5-2\sqrt{5}<m<5+2\sqrt{5}$

(3)　この方程式が実数の解をもつための条件は，係数について

$(-m)^2-4\cdot 1\cdot(-m+8)\geqq 0$　すなわち　$m^2+4m-32\geqq 0$

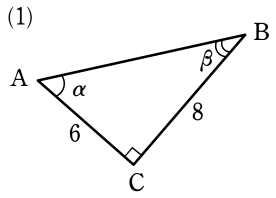
ゆえに　$(m+8)(m-4)\geqq 0$

よって，求める m の値の範囲は　$m\leqq -8,\ 4\leqq m$

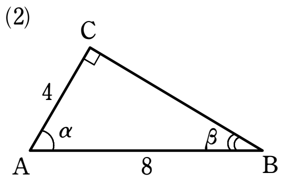
20

右の図において，α，β の正弦，余弦，正接の値を求めよ。

(1)



(2)



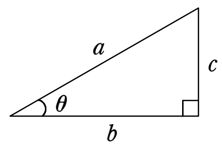
ヒント

右図において

$\sin\theta=\dfrac{c}{a}$

$\cos\theta=\dfrac{b}{a}$

$\tan\theta=\dfrac{c}{b}$



解説

(1)　$\mathrm{AB}=\sqrt{6^2+8^2}=10$ であるから

$\sin\alpha=\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$，$\cos\alpha=\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$，$\tan\alpha=\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{8}{6}=\dfrac{4}{3}$

$\sin\beta=\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$，$\cos\beta=\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$，$\tan\beta=\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}=\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}$

(2)　$\mathrm{BC}=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$ であるから

$\sin\alpha=\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{8}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\alpha=\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$，$\tan\alpha=\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$

$\sin\beta=\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$，$\cos\beta=\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{8}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\beta=\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}}=\dfrac{4}{4\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

21

θ は鋭角とする。$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ のうち，1 つが次の値をとるとき，他の 2 つの値を求めよ。

(1)　$\sin\theta=\dfrac{1}{5}$　　(2)　$\cos\theta=\dfrac{5}{13}$　　(3)　$\tan\theta=\dfrac{1}{3}$

(4)　$\sin\theta=\dfrac{6}{7}$　　(5)　$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$　　(6)　$\tan\theta=\dfrac{2}{3}$

ヒント

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$　…①　　**⟹どんなときでも使えるようにしましょう。**

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　…②　　**⟹$\tan\theta$を見たらこの式を思い出しましょう。**

$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$　…③　　**⟹①の両辺を$\cos^2\theta$で割ると導けます。**

解説

(1)　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^2=\dfrac{24}{25}$

$\cos\theta>0$ であるから　$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{24}{25}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

また　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1}{5}\div\dfrac{2\sqrt{6}}{5}=\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$

(2)　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\dfrac{5}{13}\right)^2=1-\dfrac{25}{169}=\dfrac{144}{169}$

$\sin\theta>0$ であるから　$\sin\theta=\sqrt{\dfrac{144}{169}}=\dfrac{12}{13}$

また　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{12}{13}\div\dfrac{5}{13}=\dfrac{12}{5}$

(3)　$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{10}{9}$　　よって　$\cos^2\theta=\dfrac{9}{10}$

$\cos\theta>0$ であるから　$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{9}{10}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

また　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{10}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

(4)　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{6}{7}\right)^2=\dfrac{13}{49}$

$\cos\theta>0$ であるから　$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{13}{49}}=\dfrac{\sqrt{13}}{7}$

また　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{6}{7}\div\dfrac{\sqrt{13}}{7}=\dfrac{6}{\sqrt{13}}$

(5)　$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2=\dfrac{4}{5}$

$\sin\theta>0$ であるから　$\sin\theta=\sqrt{\dfrac{4}{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

また　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\div\dfrac{1}{\sqrt{5}}=2$

(6)　$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{13}{9}$　　よって　$\cos^2\theta=\dfrac{9}{13}$

$\cos\theta>0$ であるから　$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{9}{13}}=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$

また　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{13}}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$

$\boxed{22}$

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次の等式を満たす θ の値を求めよ。

(1)　$2\sin\theta = 1$　　(2)　$\sqrt{2}\cos\theta = 1$　　(3)　$\sqrt{3}\tan\theta = -1$

解説

(1)　$2\sin\theta = 1$ から　　$\sin\theta = \frac{1}{2}$

　[図] から　　$\theta = 30°,\ 150°$

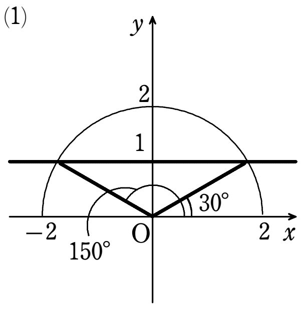
(2)　$\sqrt{2}\cos\theta = 1$ から　　$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

　[図] から　　$\theta = 45°$

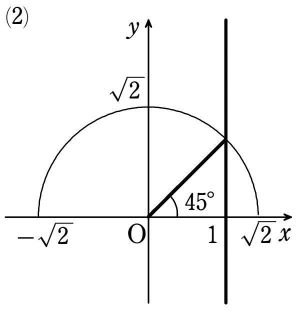
(3)　$\sqrt{3}\tan\theta = -1$ から　　$\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

　[図] から　　$\theta = 150°$

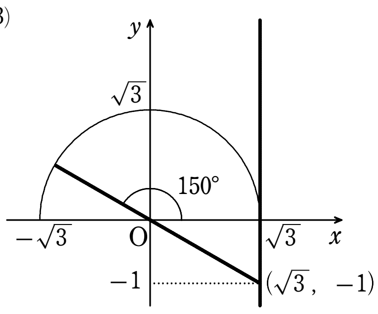
(1)



(2)



(3)



$\boxed{23}$

△ABC において，次のものを求めよ。

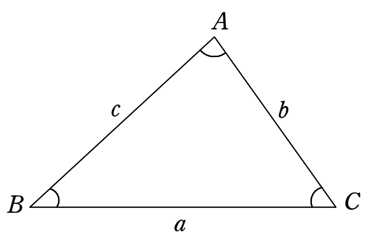
(1)　$A = 75°$，$B = 45°$，$c = \sqrt{6}$ のとき　b

(2)　$a = \sqrt{7}$，$b = 1$，$c = 2$ のとき　A

ヒント

正弦定理

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$



余弦定理

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

解説

(1)　$C = 180° - (75° + 45°) = 60°$

　正弦定理により　　$\frac{b}{\sin 45°} = \frac{\sqrt{6}}{\sin 60°}$

　よって　　$b = \frac{\sqrt{6}\sin 45°}{\sin 60°} = \sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 2$

(2)　余弦定理により　　$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1^2 + 2^2 - (\sqrt{7})^2}{2 \cdot 1 \cdot 2} = -\frac{1}{2}$

　よって　　$A = 120°$