1 扇形の弧の長さと面積

半径4，中心角 $\frac{3}{4}\pi$ の扇形の弧の長さ l と面積 S を求めよ。

解説

$l=4\times\frac{3}{4}\pi=3\pi$

$S=\frac{1}{2}\times4^2\times\frac{3}{4}\pi=6\pi$

注意

半径が r，中心角が θ である扇形の　　弧の長さは $l=r\theta$，面積は $S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rl$

2 三角関数のグラフ

次の関数のグラフをかけ。

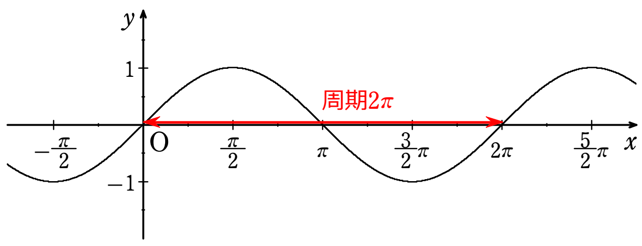
(1)　$y=\sin\theta$

(2)　$y=\sin2\theta$

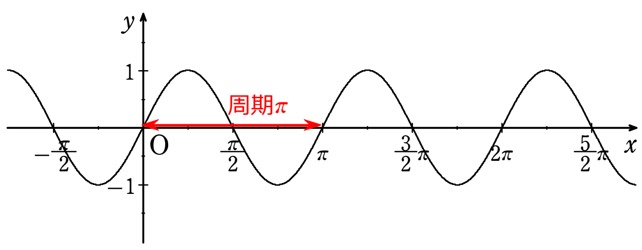
(3)　$y=\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)$

解説

(1)



(2)



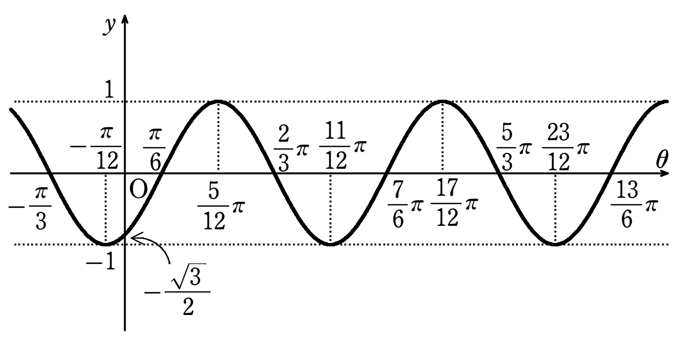
注意

$\sin n\theta$ の周期は $\sin\theta$ の周期の $\frac{1}{n}$ 倍になる。つまり $\sin2\theta$ の周期は $2\pi\times\frac{1}{2}=\pi$ となる。

(3)　関数は $y=\sin2\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$ となる。

このグラフは $y=\sin2\theta$ (周期 π) のグラフを θ 軸方向に $\frac{\pi}{6}$ だけ平行移動したものである。

グラフは右図。



3 三角方程式・不等式(1)

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$2\cos^2\theta-\sin\theta-1=0$　　　(2)　$2\sin^2\theta\geqq3\cos\theta$

解説

(1)　$2(1-\sin^2\theta)-\sin\theta-1=0$ から　　$2\sin^2\theta+\sin\theta-1=0$

ゆえに　　$(\sin\theta+1)(2\sin\theta-1)=0$

よって　　$\sin\theta=-1,\ \frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから，$\sin\theta=-1$ より　　$\theta=\frac{3}{2}\pi$

$\sin\theta=\frac{1}{2}$ より　　$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$

したがって，解は　　$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$

(2)　$2(1-\cos^2\theta)\geqq3\cos\theta$ から　　$2\cos^2\theta+3\cos\theta-2\leqq0$

ゆえに　　$(\cos\theta+2)(2\cos\theta-1)\leqq0$　……①

$\cos\theta+2>0$ であるから，① より　　$2\cos\theta-1\leqq0$　すなわち　$\cos\theta\leqq\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　　$\frac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\frac{5}{3}\pi$

4 三角方程式・不等式(2)

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$　　　(2)　$\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

(3)　$\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)\leqq-\frac{1}{2}$

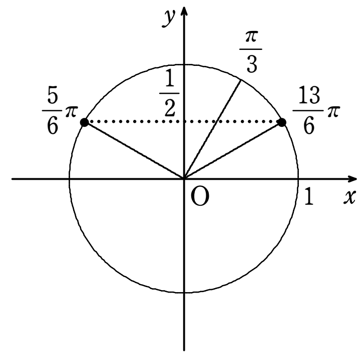
解説

(1)　$0\leqq\theta<2\pi$ より　$\frac{\pi}{3}\leqq\theta+\frac{\pi}{3}<2\pi+\frac{\pi}{3}$

したがって　$\frac{\pi}{3}\leqq\theta+\frac{\pi}{3}<\frac{7}{3}\pi$

このとき単位円より

$\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi$　よって $\theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{11}{6}\pi$



(2)　$0\leqq\theta<2\pi$ より　$-\frac{\pi}{4}\leqq2\theta-\frac{\pi}{4}<4\pi-\frac{\pi}{4}$

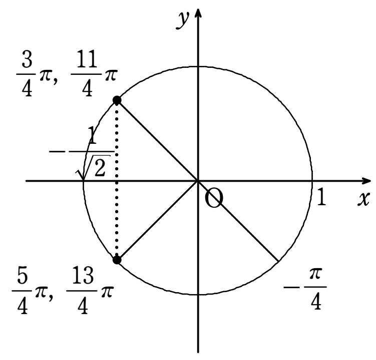
したがって　$-\frac{\pi}{4}\leqq2\theta-\frac{\pi}{4}<\frac{15}{4}\pi$

このとき単位円より

$2\theta-\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{11}{4}\pi,\ \frac{13}{4}\pi$

$2\theta=\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ 3\pi,\ \frac{7}{2}\pi$

よって　$\theta=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$



(3)　$0\leqq\theta<2\pi$ より　$\frac{\pi}{6}\leqq2\theta+\frac{\pi}{6}<2\cdot2\pi+\frac{\pi}{6}$　$2\theta+\frac{\pi}{6}=x$ とおくと，

すなわち　$\frac{\pi}{6}\leqq x<\frac{25}{6}\pi$　……①

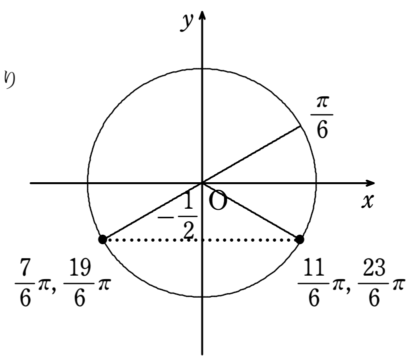
① の範囲で，$\sin x\leqq-\frac{1}{2}$ を解くと，単位円より

$\frac{7}{6}\pi\leqq x\leqq\frac{11}{6}\pi$，$\frac{19}{6}\pi\leqq x\leqq\frac{23}{6}\pi$

$\frac{7}{6}\pi\leqq2\theta+\frac{\pi}{6}\leqq\frac{11}{6}\pi$，$\frac{19}{6}\pi\leqq2\theta+\frac{\pi}{6}\leqq\frac{23}{6}\pi$

各辺から $\frac{\pi}{6}$ を引いて，2で割ると

$\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{5}{6}\pi$，$\frac{3}{2}\pi\leqq\theta\leqq\frac{11}{6}\pi$



注意

(3)　は $2\theta+\frac{\pi}{6}=x$ とおいたが，$2\theta+\frac{\pi}{6}$ のままで解いてもいい。

5 三角関数の最大値・最小値(1)

関数 $y=2\cos^2\theta-2\sin\theta+1$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めよ。

解説

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$-1\leqq\sin\theta\leqq1$　← 範囲に注意

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ なので

$y=2(1-\sin^2\theta)-2\sin\theta+1=-2\sin^2\theta-2\sin\theta+3$

$=-2(\sin^2\theta+\sin\theta)+3$

$=-2\left(\sin\theta+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{2}$

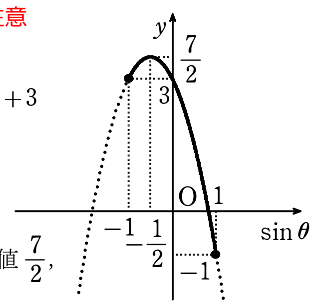
$-1\leqq\sin\theta\leqq1$ の範囲で y は，$\sin\theta=-\frac{1}{2}$ のとき最大値 $\frac{7}{2}$，

$\sin\theta=1$ のとき最小値 -1 をとる。

$\sin\theta=-\frac{1}{2}$ から　$\theta=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

$\sin\theta=1$ から　$\theta=\frac{\pi}{2}$

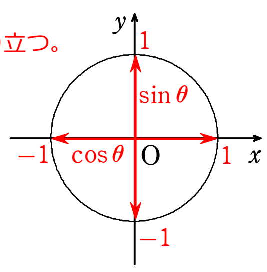
したがって　$\theta=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$ のとき最大値 $\frac{7}{2}$；$\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき最小値 -1



注意

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲では，$-1\leqq\sin\theta\leqq1$，$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ が成り立つ。

いつでも使えるように心がけておこう。



6 三角関数の最大値・最小値(2)

次の関数の最大値・最小値と，そのときのθの値を求めよ。

(1)　$y=2\cos\theta+1$　　$(0\leqq\theta<2\pi)$

(2)　$y=\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$　　$\left(\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{4}{3}\pi\right)$

解説

(1)　$0\leqq\theta<2\pi$のとき，$-1\leqq\cos\theta\leqq1$だから

$-2\leqq2\cos\theta\leqq2$　したがって$-1\leqq2\cos\theta+1\leqq3$

よって，$\cos\theta=1$　すなわち　$\theta=0$のとき最大値3

$\cos\theta=-1$すなわち　$\theta=\pi$のとき最小値-1

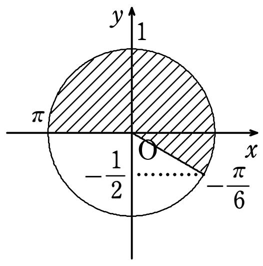
(2)　$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{4}{3}\pi$のとき，$-\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{3}\leqq\pi$　　← $0\leqq\theta<2\pi$ではないので $-1\leqq\sin\theta\leqq1$ ではない

このとき　$-\dfrac{1}{2}\leqq\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq1$

よって，

$\theta-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$　すなわち　$\theta=\dfrac{5}{6}\pi$のとき最大値1

$\theta-\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{6}$すなわち　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$のとき最小値$-\dfrac{1}{2}$



7 加法定理を利用した計算

$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$とする。$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos\beta=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\cos\alpha$　　(2)　$\sin\beta$　　(3)　$\sin(\alpha-\beta)$　　(4)　$\cos(\alpha+\beta)$

解説

(1)　$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ より，$\cos\alpha<0$ であるから　　$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\dfrac{4}{5}$

(2)　$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ より，$\sin\beta>0$ であるから　　$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

(3)　$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)-\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}=-\frac{2\sqrt{5}}{25}$$

(4)　$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$$=-\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)-\frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

8 2直線のなす角

(1)　2直線 $\sqrt{3}x-2y+2=0$，$3\sqrt{3}x+y-1=0$ のなす鋭角 θ を求めよ。

(2)　直線 $y=2x-1$ と $\dfrac{\pi}{4}$ の角をなす直線の傾きを求めよ。

解説

(1)　2直線の方程式を変形すると

$y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+1$，$y=-3\sqrt{3}x+1$

図のように，2直線と x 軸の正の向きとのなす角を，それぞれ α，β とすると，求める鋭角 θ は

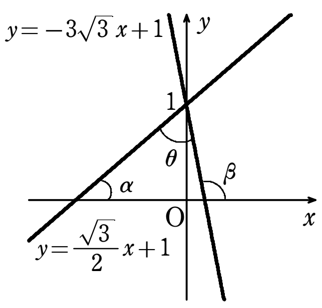
$\theta=\beta-\alpha$

$\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\beta=-3\sqrt{3}$ で，

$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$

$$=\left(-3\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\div\left\{1+(-3\sqrt{3})\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}=\sqrt{3}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$



別解　2直線は垂直でないから　　$\tan\theta=\left|\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-(-3\sqrt{3})}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-3\sqrt{3})}\right|=\dfrac{7\sqrt{3}}{2}\div\dfrac{7}{2}=\sqrt{3}$

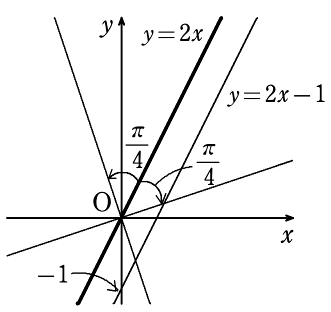
$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

(2)　直線 $y=2x-1$ と x 軸の正の向きとのなす角を α とすると　　$\tan\alpha=2$

$$\tan\left(\alpha\pm\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\dfrac{\pi}{4}}{1\mp\tan\alpha\tan\dfrac{\pi}{4}}=\frac{2\pm1}{1\mp2\cdot1}$$

(複号同順)

であるから，求める直線の傾きは　　-3，$\dfrac{1}{3}$



9 三角方程式・不等式(3)

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\sin2\theta=\cos\theta$　　(2)　$\cos2\theta-3\cos\theta+2\geqq0$

解説

(1)　方程式から　　$2\sin\theta\cos\theta=\cos\theta$

ゆえに　　$\cos\theta(2\sin\theta-1)=0$

よって　　$\cos\theta=0$，$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　　$\cos\theta=0$ より　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi$

$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ より　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi$

以上から，解は　　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{5}{6}\pi$，$\dfrac{3}{2}\pi$

(2)　不等式から　　$2\cos^2\theta-1-3\cos\theta+2\geqq0$

整理すると　　$2\cos^2\theta-3\cos\theta+1\geqq0$

ゆえに　　$(\cos\theta-1)(2\cos\theta-1)\geqq0$

$0\leqq\theta<2\pi$ では，$\cos\theta-1\leqq0$ であるから　　$\cos\theta-1=0$，$2\cos\theta-1\leqq0$

よって　　$\cos\theta=1$，$\cos\theta\leqq\dfrac{1}{2}$

したがって，解は　　$\theta=0$，$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{3}\pi$

注意

2倍角の公式

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

$\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

10 三角方程式・不等式(4)

$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1)　$\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta+1=0$　　(2)　$\cos2\theta+\sin2\theta+1>0$

解説

(1)　$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$ であるから，方程式は

$2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)+1=0$　　ゆえに　　$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{1}{2}$

$\theta+\dfrac{\pi}{6}=t$ とおくと，$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき　　$\dfrac{\pi}{6}\leqq t\leqq\pi+\dfrac{\pi}{6}$

この範囲で $\sin t=-\dfrac{1}{2}$ を解くと　　$t=\dfrac{7}{6}\pi$

よって，解は　　$\theta=t-\dfrac{\pi}{6}=\pi$

(2)　$\sin2\theta+\cos2\theta=\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ であるから，不等式は

$\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)+1>0$　　ゆえに　　$\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)>-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$2\theta+\dfrac{\pi}{4}=t$ とおくと，$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき　$\dfrac{\pi}{4}\leqq t\leqq2\cdot\pi+\dfrac{\pi}{4}$

この範囲で $\sin t>-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を解くと

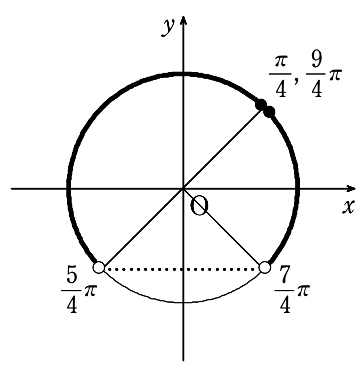
$\dfrac{\pi}{4}\leqq t<\dfrac{5}{4}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi<t\leqq\dfrac{9}{4}\pi$

すなわち　$\dfrac{\pi}{4}\leqq2\theta+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{5}{4}\pi$，

$\dfrac{7}{4}\pi<2\theta+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{9}{4}\pi$

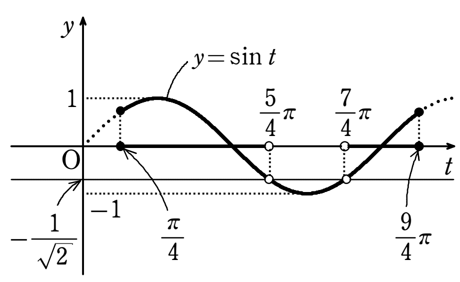
よって，解は

$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{4}\pi<\theta\leqq\pi$



別解

グラフで考えてもよい。



注意

三角関数の合成

$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$　ただし　$\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

11 置き換えを用いた最大・最小

関数 $f(\theta)=\sin 2\theta+2(\sin\theta+\cos\theta)-1$ を考える。ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1) $t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくとき，$f(\theta)$ を t の式で表せ。

(2) t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) $f(\theta)$ の最大値と最小値を求め，そのときの θ の値を求めよ。

解説

(1) $t=\sin\theta+\cos\theta$ の両辺を 2 乗すると

$$t^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$

ゆえに　$t^2=1+\sin 2\theta$　　よって　$\sin 2\theta=t^2-1$

したがって　$f(\theta)=t^2-1+2t-1=t^2+2t-2$

(2) $t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$　…… ①

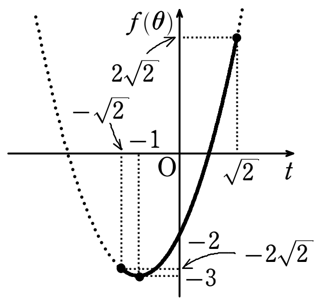
$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{9}{4}\pi$ …… ② であるから

$-1\leqq\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$　　よって　$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

(3) (1) から　$f(\theta)=t^2+2t-2=(t+1)^2-3$

$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ の範囲において $f(\theta)$ は

$t=\sqrt{2}$ で最大値 $2\sqrt{2}$，$t=-1$ で最小値 -3 をとる。



$t=\sqrt{2}$ のとき，① から　$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$

② の範囲で解くと　$\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$　すなわち　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

$t=-1$ のとき，① から　$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

② の範囲で解くと　$\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$　すなわち　$\theta=\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$

よって　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最大値 $2\sqrt{2}$；$\theta=\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$ のとき最小値 -3

注意

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$
$=2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta$
$=2\sin\cos\theta+1$

なので，2倍角の公式より　$t^2=\sin 2\theta+1$となり$\sin 2\theta$をtで表すことができる。

$\sin\theta+\cos\theta$から$\sin\theta\cos\theta$への変形は頻出なので必ず覚えておくこと。

12 半角の公式を利用した最大・最小

関数 $y=\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+3\sin^2\theta$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値と最小値を求めよ。

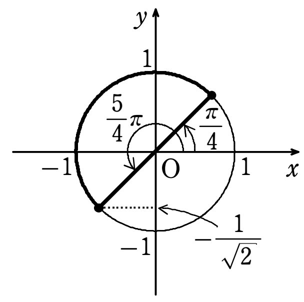
また，そのときの θ の値を求めよ。

解説

$y=\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+3\sin^2\theta$

$=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}-\sin 2\theta+3\cdot\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

$=2-(\sin 2\theta+\cos 2\theta)=2-\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$



$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\dfrac{\pi}{4}\leqq 2\theta+\dfrac{\pi}{4}\leqq 2\cdot\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}$

すなわち　$\dfrac{\pi}{4}\leqq 2\theta+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{5}{4}\pi$

ゆえに　$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$　…… ①

よって　$2-\sqrt{2}\leqq 2-\sqrt{2}\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 3$

したがって　$2\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5}{4}\pi$　すなわち　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 3

$2\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$　すなわち　$\theta=\dfrac{\pi}{8}$ のとき最小値 $2-\sqrt{2}$

注意

$y=\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+3\sin^2\theta$　において，

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$や$\sin^2\theta=1-\sin^2\theta$と変形してもうまくいきません。

$2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta$であることに注目すると

$\boxed{\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}\ \cdots②，\ \cos^2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}\ \cdots③\quad（半角一歩手前の公式）}$

を利用すれば2θで統一できます。2θに統一した後は合成です。

※この公式は数Ⅲでもよく使う式なので理系生徒は必ず覚えましょう。

忘れたときは半角の公式，もしくは2倍角の公式から導きましょう。

【②式の2倍角の公式からの証明】

$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$ より

$2\sin^2\theta=1-\cos 2\theta$　よって$\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

③も$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$から同様に証明できる。

半角の公式

$\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$　　$\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$　　$\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$