4−1　関数$y=ax^2$

1

解答　(1)①$y=x^3$　②$y=5x^2$　(2)②　比例定数5

解説

(1)①$y=x\times x\times x=3x^3$　②$y=x\times x\times 5=5x^2$

2

解答　(1)①$y=3x^2$　②$y=12$　(2)①$y=4x^2$　②$y=36$

解説

(1)①$y=ax^2$に$x=2$、$y=12$を代入　$12=a\times 2^2$

$12=4a$

$a=3$

よって、$y=3x^2$

②$y=3x^2$に$x=-2$を代入　$y=3\times(-2)^2=3\times 4=12$

(2)①$y=ax^2$に$x=-2$、$y=16$を代入　$16=a\times(-2)^2$

$16=4a$

$a=4$

よって、$y=4x^2$

②$y=4x^2$に$x=3$を代入　$y=4\times 3^2=4\times 9=36$

3

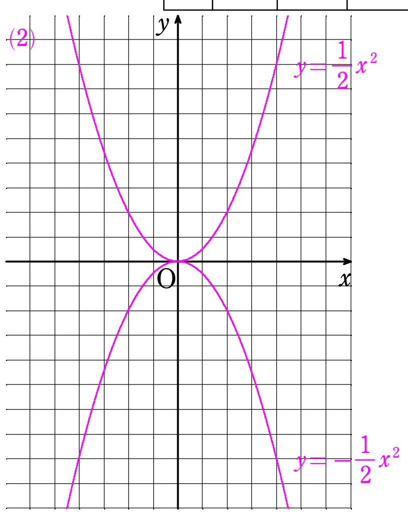
解答　(1)$y=\frac{1}{2}x^2$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	8	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8

$y=-\frac{1}{2}x^2$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-8	$-\frac{9}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{9}{2}$	-8

(2)



解説

(1)$y=\frac{1}{2}x^2$に$x=-4$を代入　$y=\frac{1}{2}\times(-4)^2=\frac{1}{2}\times 16=8$

$y=\frac{1}{2}x^2$に$x=-1$を代入　$y=\frac{1}{2}\times(-1)^2=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$

$y=\frac{1}{2}x^2$に$x=2$を代入　$y=\frac{1}{2}\times 2^2=\frac{1}{2}\times 4=2$

$y=\frac{1}{2}x^2$に$x=3$を代入　$y=\frac{1}{2}\times 3^2=\frac{1}{2}\times 9=\frac{9}{2}$

$y=-\frac{1}{2}x^2$に$x=-2$を代入　$y=-\frac{1}{2}\times(-2)^2=-\frac{1}{2}\times 4=-2$

$y=-\frac{1}{2}x^2$に$x=0$を代入　$y=-\frac{1}{2}\times 0^2=-\frac{1}{2}\times 0=0$

$y=-\frac{1}{2}x^2$に$x=1$を代入　$y=-\frac{1}{2}\times 1^2=-\frac{1}{2}\times 1=-\frac{1}{2}$

$y=-\frac{1}{2}x^2$に$x=4$を代入　$y=-\frac{1}{2}\times 4^2=-\frac{1}{2}\times 16=-8$

(2)$y=\frac{1}{2}x^2$は、$(-4, 8)$、$(-2, 2)$、$(0, 0)$、$(2, 2)$、$(4, 8)$を通る放物線

$y=-\frac{1}{2}x^2$は、$(-4, -8)$、$(-2, -2)$、$(0, 0)$、$(2, -2)$、$(4, -8)$を通る放物線

4

解答　(1)②、④、⑤　(2)⑥　(3)①と④、③と⑤

解説

(1)$a<0$なもの

(2)aの絶対値が最も大きいもの

(3)aの絶対値が等しく、符号が逆なもの

5

解答　(1)$a=\frac{1}{2}$　(2)$b=8$

解説

(1)$y=ax^2$のグラフは点$(2, 2)$を通るので、$y=ax^2$に$x=2$、$y=2$を代入

$2=a\times 2^2$

$2=4a$

$a=\frac{1}{2}$

(2)(1)より、$y=\frac{1}{2}x^2$が$(-4, b)$を通るので、$y=\frac{1}{2}x^2$に$x=-4$、$y=b$を代入

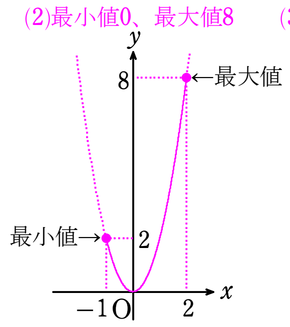
$b=\frac{1}{2}\times(-4)^2=\frac{1}{2}\times 16=8$

4−2　関数$y=ax^2$の値の変化

1

解答　(1)$x=-1$のとき$y=2$、$x=0$のとき$y=0$、$x=2$のとき$y=8$

(2)最小値0、最大値8　(3)$0\leqq y\leqq 8$



解説

(1)$y=2x^2$に$x=-1, 0, 2$をそれぞれ代入

$y=2\times(-1)^2=2\times 1=2$

$y=2\times 0^2=2\times 0=0$

$y=2\times 2^2=2\times 4=8$

(3)yの変域　(最小値)$\leqq y\leqq$(最大値)

2

解答　(1)12　(2)−18　(3)−6

解説

(1)$y=3x^2$に$x=0, 4$を代入　$x=0$のとき　$y=3\times 0^2=0$

$x=4$のとき　$y=3\times 4^2=48$

変化の割合$=\frac{48-0}{4-0}=\frac{48}{4}=12$

(2)$y=3x^2$に$x=-4, -2$を代入　$x=-4$のとき　$y=3\times(-4)^2=48$

$x=-2$のとき　$y=3\times(-2)^2=12$

変化の割合$=\frac{12-48}{-2-(-4)}=\frac{-36}{2}=-18$

(3)$y=3x^2$に$x=-6, 4$を代入　$x=-6$のとき　$y=3\times(-6)^2=108$

$x=4$のとき　$y=3\times 4^2=48$

変化の割合$=\frac{48-108}{4-(-6)}=\frac{-60}{10}=-6$

別解　(1)変化の割合$=3(0+4)=3\times 4=12$

(2)変化の割合$=3(-4-5)=3\times(-6)=-18$

(3)変化の割合$=3(-6+4)=3\times(-2)=-6$

3

解答　(1)$a=2$　(2)$a=-2$

解説

(1)$a(1+3)=8$

$4a=8$

$a=2$

別解　$x=1$のとき　$y=a\times 1^2=a$

$x=3$のとき　$y=a\times 3^2=9a$

$\frac{9a-a}{3-1}=8$

$\frac{8a}{2}=8$

$4a=8$

$a=2$

(2)$-3(a+a+1)=9$

$-3(2a+1)=9$

$2a+1=-3$

$2a=-4$

$a=-2$

別解　$x=a$のとき　$y=-3a^2$

$a=a+1$のとき　$y=-3(a+1)^2$

$\frac{-3(a+1)^2-(-a^2)}{a+1-a}=9$

$-3(a+1)^2+3a^2=9$

$(a+1)^2-a^2=-3$

$a^2+2a+1-a^2=-3$

$2a+1=-3$

$2a=-4$

$a=-2$

4−3　放物線と直線

1

解答　(3 , 9)、(−1 , 1)

解説

交点の座標→連立方程式（代入法）で解く

$$\begin{cases} y=x^2 & \cdots① \\ y=2x+3 & \cdots② \end{cases}$$

②に①を代入　$x^2=2x+3$

$x^2-2x-3=0$

$(x-3)(x+1)=0$

$x=3\,,\,-1$

$x=3$のとき　$y=3^2=9$

$x=-1$のとき　$y=(-1)^2=1$

よって、(3 , 9)、(−1 , 1)

2

解答　(6 , 12)

解説

点A$(-3\,,3)$は、放物線$y=ax^2$と直線$y=x+b$上の点なので、それぞれに$x=-3$、$y=3$を代入

$3=a\times(-3)^2$　　$3=-3+b$

$3=9a$　　$b=3+3$

$a=\dfrac{1}{3}$　　$b=6$

$y=\dfrac{1}{3}x^2$　　$y=x+6$

点Bは、放物線$y=\dfrac{1}{3}x^2$と直線$y=x+6$のの交点なので、

$\dfrac{1}{3}x^2=x+6$

$\dfrac{1}{3}x^2-x-6=0$

$x^2-3x-18=0$

$(x-6)(x+3)=0$

$x=6\,,\,-3$

点Aのx座標が−3なので、点Bのx座標は6

よって、点Bのy座標は　$y=6+6=12$

したがって、点B(6 , 12)

3

解答　$y=2x+4$

解説

点A、Bは放物線$y=2x^2$上の点なので、$y=2x^2$に$x=-1\,,2$を代入

$x=-1$のとき　$y=2\times(-1)^2=2$

$x=2$のとき　$y=2\times2^2=8$

よって、A(−1 , 2)、B(2 , 8)

直線ℓは、2点A(−1 , 2)、B(2 , 8)を通るので、直線ℓを$y=ax+b$として、それぞれ代入

$$\begin{cases} 2=-a+b & ① \\ 8=2a+b & ② \end{cases}$$

②−①
$$\begin{array}{rl} 8= & 2a+b \\ -)\ 2= & -a+b \\ \hline 6= & 3a \end{array}$$

$a=2$

$a=2$を①に代入　$2=-2+b$

$b=4$

よって、直線ℓは$y=2x+4$

4−4　放物線と図形の面積

1

解答　15

解説

点A、Bは放物線$y=x^2$と直線$y=x+6$との交点なので

$x^2=x+6$

$x^2-x-6=0$

$(x-3)(x+2)=0$

$x=3\,,\,-2$

よって図より、点Aのx座標は−2、点Bのx座標は3

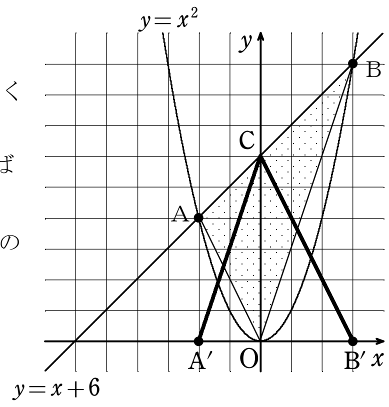
△OAB＝△OAC＋△OBC

$=\dfrac{1}{2}\times6\times2+\dfrac{1}{2}\times6\times3$

$=6+9$

$=15$

別解



直線$y=x+6$とy軸との交点をCとする。

△OACと△OA′C、△OBCと△OB′Cの面積が等しくなるような点A′、B′をx軸上にとる。

それぞれOCを底辺と考えると、高さが同じであれば面積が等しくなる。

点A、Bのx座標は、放物線$y=x^2$と直線$y=x+6$との交点なので　$x^2=x+6$

$x^2-x-6=0$

$(x-3)(x+2)=0$

$x=3\,,\,-2$

よって、点Aのx座標は−2、点Bのx座標は3

したがって、点A′(−2 , 0)、点B′(3 , 0)となる。

△OAB＝△OA′C＋△OB′C

＝△A′B′C

$=\dfrac{1}{2}\times A'B'\times OC$

$=\dfrac{1}{2}\times5\times6$

$=15$

2

解答　$y=-\dfrac{7}{4}x+\dfrac{15}{4}$

解説

OBの中点をMとすると、M$\left(\dfrac{0+2}{2}\,,\,\dfrac{0+4}{2}\right)=(1\,,2)$

求める直線を$y=ax+b$とする。

$y=ax+b$は2点A(−3 , 9)、M(1 , 2)を通るので、

$$\begin{cases} 9=-3a+b & \cdots① \\ 2=a+b & \cdots② \end{cases}$$

②−①
$$\begin{array}{rl} 2= & a+b \\ -\ \ 9= & -3a+b \\ \hline -7= & 4a \end{array}$$

$a=-\dfrac{7}{4}$

$a=-\dfrac{7}{4}$を②に代入　$2=-\dfrac{7}{4}+b$

$b=2+\dfrac{7}{4}$

$=\dfrac{8+7}{4}$

$=\dfrac{15}{4}$

よって、$y=-\dfrac{7}{4}x+\dfrac{15}{4}$

3

解答　(1)(2 , 4)　(2)(0 , 4)

解説

(1)底辺をABとすると、AB∥OPのとき△OAB＝△PABとなる。

直線OPは、原点を通り、直線$y=2x+3$と平行な直線なので、$y=2x$

点Pは放物線$y=x^2$と直線$y=2x$との交点なので、

$x^2=2x$

$x^2-2x=0$

$x(x-2)=0$

$x=2\,,0$

$x=0$は原点なので、$x=2$

$y=2\times2=4$

よって、点P(2 , 4)

(2)底辺をOBとすると、OB∥ACのとき△OAB＝△OCBとなる。

点Cは直線ACの切片なので、直線ACの式がわかればよい。

直線ACを$y=ax+b$とする。

直線ACの傾きは直線OBと同じである。

直線OBの傾きは$\dfrac{9}{3}=3$

直線ACは、傾き3で、点A(−1 , 1)を通る直線なので、

$1=3\times(-1)+b$

$b=4$

よって、直線ACは$y=3x+4$

したがって、点C(0 , 4)

4−5　関数のグラフと図形

1

解答　(1)a^2　(2)$=3$　(3)$a=2$

解説

(1)点P、Qのx座標はaなので、点Pのy座標　$y=2a^2$

点Qのy座標　$y=a^2$

PQ＝（点Pのy座標）－（点Qのy座標）

$=2a^2-a^2$

$=a^2$

(2)(1)より　$a^2=9$

$a=\pm3$

$a>0$より　$a=3$

(3)四角形PQSRが正方形になるためには、PQ＝RQとなればよい。

(1)よりPQ＝a^2、RQ＝$a+a=2a$

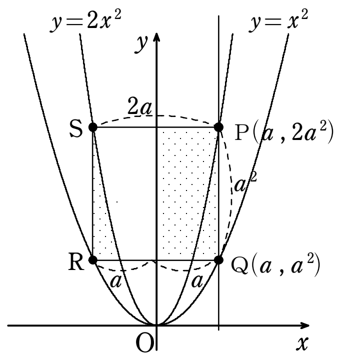
$a^2=2a$

$a^2-2a=0$

$a(a-2)=0$

$a=2,0$

$a>0$より　$a=2$



2

解答　(1)(2, 10)　(2)$y=-3x+8$　(3)24

解説

(1)点Cは点Aをx軸方向に−2、y軸方向に＋2移動させた点

C(4−2, 8＋2)＝(2, 10)

別解　点Cは点Bをx軸方向に＋4、y軸方向に＋8移動させた点

C(−2＋4, 2＋8)＝(2, 10)

(2)平行四辺形の面積を2等分する直線は、対角線の交点を通る。

つまり、対角線の中点を通る。

OCの中点をMとすると、$M\left(\dfrac{0+2}{2}, \dfrac{0+10}{2}\right)=(1, 5)$

求める直線を$y=ax+b$とすると、$y=ax+b$は、点M(1, 5)と点D(0, 8)を通るので、

$$\begin{cases}5=a+b & \cdots① \\ 8=b & \cdots②\end{cases}$$

②を①②代入　$5=a+8$

$a=-3$

よって、$y=-3x+8$

(3)平行四辺形の対角線は面積を２等分する。

点Aと点Bを結び、対角線ABをつくり、直線ABの切片をEとする。

直線ABは点A(4, 8)と点B(−2, 2)を通るので、

$$\begin{cases}8=4a+b & \cdots① \\ 2=-2a+b & \cdots②\end{cases}$$

①−②

$$\begin{array}{rrl} & 8= & 4a+b \\ -) & 2= & -2a+b \\ \hline & 6= & 6a \end{array}$$

$a=1$

$a=1$を②に代入　$2=-2\times1+b$

$b=2+2$

$=4$

よって、点E(0, 4)

△ABO＝△EBO＋△EAO

$=\dfrac{1}{2}\times4\times2+\dfrac{1}{2}\times4\times4$

$=4+8$

$=12$

▱OACB＝△ABO×2

$=12\times2$

$=24$

別解　△EBOと△EB′O、△EAOと△EA′Oの面積が等しくなるような点A′、B′をx軸上にとる。

それぞれOEを底辺と考えると、高さが同じであれば面積が等しくなる。

つまり、点Bと点B′、点Aと点A′のx座標は等しくなるので、点A′(−2, 0)、点B′(4, 0)

△ABO＝△EBO＋△EAO

＝△EB′O＋△EA′O

＝EB′A′

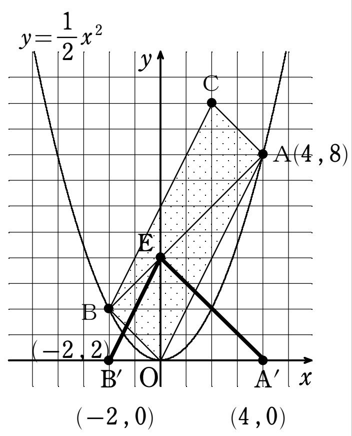
$=\dfrac{1}{2}\times$B′A′×EO

$=\dfrac{1}{2}\times6\times4$

$=12$

▱OACB＝12×2

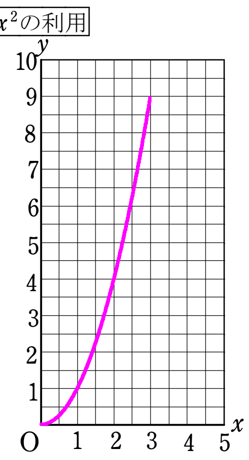
$=24$



4−6　関数$y=ax^2$の利用

1

解答　(1)$y=x^2$　(2)$y=3x$、$3\leqq x\leqq6$



解説

(1)$y=\dfrac{1}{2}\times AQ\times AP$

$=\dfrac{1}{2}\times x\times2x$

$=x^2$

点Pが辺AD上にあるのは、0〜3秒のとき

$x=0$のとき　$y=0^2=0$

$x=1$のとき　$y=1^2=1$

$x=2$のとき　$y=2^2=4$

$x=3$のとき　$y=3^2=9$

(2)$y=\dfrac{1}{2}\times AQ\times6$

$=\dfrac{1}{2}\times x\times6$

$=3x$

点Pが辺DC上にあるのは、3〜6秒のとき

つまり、xの変域は$3\leqq x\leqq6$

2

解答　(1)$y=\dfrac{1}{2}x^2$、$0\leqq x\leqq8$　(2)6秒後

解説

(1)$y=\dfrac{1}{2}\times x\times x$

$=\dfrac{1}{2}x^2$

点Aから点Bまでは8cm、点Pは毎秒1cmで動くので、点Qが点Aから点Bまで動くには8秒かかる。

よって、xの変域は$0\leqq x\leqq8$

(2)(1)より、$y=\dfrac{1}{2}x^2$、これに$y=18$を代入

$18=\dfrac{1}{2}x^2$

$x^2=36$

$x=\pm6$

$0\leqq x\leqq8$より　$x=6$

よって、6秒後

3

解答　(1)$y=200$　(2)いえる　(3)$50<x\leqq100$

解説

(1)グラフより、$y=200$

(2)xの値を決めると、それに対応してyの値もただ1つ決まるので、yはxの関数であるといえる

(3)○：＜、＞　●：≦、≧

グラフより、$50<x\leqq100$