1

次のような円の方程式を求めよ。

(1)　点 $(1,\ 2)$ を通り，x 軸と y 軸の両方に接する円

(2)　中心が直線 $y=2x$ 上にあり，原点と点 $(2,\ 4)$ を通る円

(3)　2 点 $(-5,\ 1)$，$(2,\ 8)$ を通り，x 軸に接する円

解説

(1)　両座標軸に接し，点 $(1,\ 2)$ を通るから，円の中心は第 1 象限にある。

円の中心の座標を $(a,\ b)$，半径を r とすると

$a>0,\ b>0$ で　　$a=b=r$

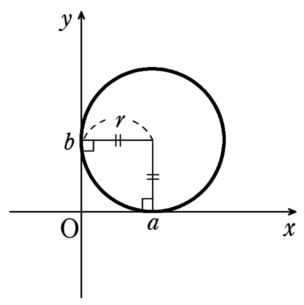
よって，円の方程式は　　$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$

これが点 $(1,\ 2)$ を通るから　$(1-r)^2+(2-r)^2=r^2$

整理して　$r^2-6r+5=0$　　ゆえに　$r=1,\ 5$

よって，求める円の方程式は

$(x-1)^2+(y-1)^2=1,\ (x-5)^2+(y-5)^2=25$



(2)　中心が直線 $y=2x$ 上にあるから，求める円の方程式は，$(x-a)^2+(y-2a)^2=r^2$ とおける。

これが原点と点 $(2,\ 4)$ を通るから

$(0-a)^2+(0-2a)^2=r^2,\ (2-a)^2+(4-2a)^2=r^2$

この 2 式から r を消去して

$(0-a)^2+(0-2a)^2=(2-a)^2+(4-2a)^2$

整理して　$-20a+20=0$　　ゆえに　$a=1$　　このとき　$r^2=5$

よって，求める円の方程式は　　$(x-1)^2+(y-2)^2=5$

(3)　x 軸に接するから，求める円の方程式は，$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$ とおける。

これが 2 点 $(-5,\ 1)$，$(2,\ 8)$ を通るから

$(-5-a)^2+(1-b)^2=b^2,\ (2-a)^2+(8-b)^2=b^2$

ゆえに　　$a^2+10a-2b+26=0$　……①

$a^2-4a-16b+68=0$　……②

①×8－② から　　$7a^2+84a+140=0$　すなわち　$a^2+12a+20=0$

これを解いて　　$a=-10,\ -2$

また，$(-5-a)^2+(1-b)^2=b^2$ から　　$b=\dfrac{1}{2}\{(a+5)^2+1\}$

この式に求めた a の値を代入すると

$a=-10$ のとき　$b=13$，$a=-2$ のとき　$b=5$

よって，求める円の方程式は

$(x+10)^2+(y-13)^2=169,\ (x+2)^2+(y-5)^2=25$

2

円 $x^2+y^2=25$ と直線 $y=3x+k$ が共有点をもつとき，定数 k の値の範囲を求めよ。また，接するときの k の値と接点の座標を求めよ。

解説

円と直線の方程式から y を消去して　　$10x^2+6kx+k^2-25=0$　……①

判別式は　　$\dfrac{D}{4}=(3k)^2-10(k^2-25)=-k^2+250=-(k+5\sqrt{10})(k-5\sqrt{10})$

円と直線が共有点をもつための条件は　　$D\geqq 0$

ゆえに　　$-(k+5\sqrt{10})(k-5\sqrt{10})\geqq 0$　　よって　　$-5\sqrt{10}\leqq k\leqq 5\sqrt{10}$

また，円と直線が接するための条件は　　$D=0$　　よって　　$k=\pm 5\sqrt{10}$

2 次方程式 ① が重解をもつとき，その重解は　　$x=-\dfrac{6k}{2\cdot 10}=-\dfrac{3k}{10}$

$x=-\dfrac{3k}{10}$ のとき　　$y=3\left(-\dfrac{3k}{10}\right)+k=\dfrac{k}{10}$

したがって，接点の座標は　　$k=5\sqrt{10}$ のとき　$\left(-\dfrac{3\sqrt{10}}{2},\ \dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)$，

$k=-5\sqrt{10}$ のとき　$\left(\dfrac{3\sqrt{10}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)$

3

次の円の，与えられた点における接線の方程式を求めよ。

$x^2+y^2=25$　　$(4,\ 3)$

解説

(1)　$4x+3y=25$

(2)　$1\cdot x+(-2)y=5$　　すなわち　　$x-2y=5$

(3)　$-2x+0\cdot y=4$　　すなわち　　$x=-2$

(4)　$\sqrt{3}\,x+(-\sqrt{6})y=9$　　すなわち　　$\sqrt{3}\,x-\sqrt{6}\,y=9$

4

円 $(x-2)^2+(y-3)^2=25$ 上の点 $(5,\ 7)$ における接線の方程式を求めよ。

解説

円の中心 $(2,\ 3)$ と点 $(5,\ 7)$ を通る直線の傾きは　　$\dfrac{7-3}{5-2}=\dfrac{4}{3}$

求める接線は，この直線に垂直で，点 $(5,\ 7)$ を通るから，その方程式は

$y-7=-\dfrac{3}{4}(x-5)$　　すなわち　　$3x+4y=43$

別解　円 $(x-2)^2+(y-3)^2=25$　……① を，

中心 $(2,\ 3)$ が原点 $(0,\ 0)$ にくるように平行移動すると

円 $x^2+y^2=25$　……②

になる。

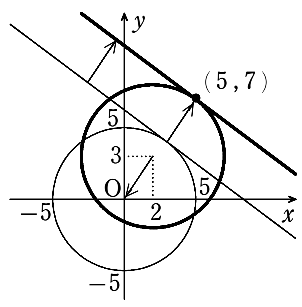
この平行移動により，円 ① 上の点 $(5,\ 7)$ は点 $(3,\ 4)$ に移る。

点 $(3,\ 4)$ における円 ② の接線の方程式は

$3x+4y=25$　……③

求める接線は，③ を x 軸方向に 2，y 軸方向に 3 だけ平行移動したもので，その方程式は

$3(x-2)+4(y-3)=25$　　すなわち　　$3x+4y=43$



参考　円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$

これを利用すると，本問の接線の方程式は

$(5-2)(x-2)+(7-3)(y-3)=25$

から求められる。

5

点 $(3,\ 1)$ から円 $x^2+y^2-2x+6y=0$ に引いた接線の方程式を求めよ。

解説

$x^2+y^2-2x+6y=0$ を変形すると　　$(x-1)^2+(y+3)^2=10$　……①

この円は中心 $(1,\ -3)$，半径 $\sqrt{10}$ であるから，点 $(3,\ 1)$ から引いた接線は x 軸に垂直ではない。

接線の方程式を　$y=m(x-3)+1$　……② とすると

$mx-y-3m+1=0$

円 ① の中心 $(1,\ -3)$ と接線の距離が，円の半径 $\sqrt{10}$ に等しいから

$\dfrac{|m\cdot 1-(-3)-3m+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$

分母を払って　　$|-2m+4|=\sqrt{10}\sqrt{m^2+1}$

両辺を平方して　　$(-2m+4)^2=10(m^2+1)$

整理すると　　$3m^2+8m-3=0$

ゆえに　　$(m+3)(3m-1)=0$　　よって　　$m=-3,\ \dfrac{1}{3}$

したがって，接線の方程式は　　$y=-3x+10,\ y=\dfrac{1}{3}x$

別解　② を ① に代入して　　$(x-1)^2+\{m(x-3)+4\}^2=10$

展開して整理すると

$(m^2+1)x^2-2(3m^2-4m+1)x+9m^2-24m+7=0$

円 ① と直線 ② が接するための条件は，この x についての 2 次方程式の判別式を D とすると　$D=0$

$\dfrac{D}{4}=(3m^2-4m+1)^2-(m^2+1)(9m^2-24m+7)$

$=(9m^4+16m^2+1-24m^3-8m+6m^2)-(9m^4-24m^3+7m^2+9m^2-24m+7)$

$=2(3m^2+8m-3)=2(m+3)(3m-1)$

であるから　　$(m+3)(3m-1)=0$

よって　　$m=-3,\ \dfrac{1}{3}$

したがって，接線の方程式は　　$y=-3x+10,\ y=\dfrac{1}{3}x$

6

円 $(x-1)^2+(y-2)^2=5$ が直線 $y=3x-6$ から切り取る弦の長さを求めよ。また，弦の中点の座標を求めよ。

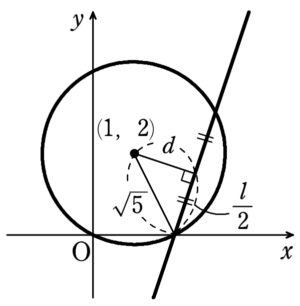
解説

$(x-1)^2+(y-2)^2=5$ ……①，$y=3x-6$ ……②
とする。
円①の中心 $(1,\ 2)$ と直線②の距離 d は

$$d=\frac{|3\cdot1-2-6|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

弦の長さを l とすると，円①の半径は $\sqrt{5}$ であるから

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2=(\sqrt{5})^2-d^2=\frac{5}{2}$$



ゆえに　$l^2=10$　　よって，弦の長さは　$l=\sqrt{10}$

円①の中心 $(1,\ 2)$ を通り，直線②に垂直な直線の方程式は　$y-2=-\dfrac{1}{3}(x-1)$

すなわち　$x+3y-7=0$ ……③

直線②，③の交点が，弦の中点であるから，②，③を連立して解くと　$x=\dfrac{5}{2}$，$y=\dfrac{3}{2}$

したがって，弦の中点の座標は　$\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$

別解　②を①に代入して　$(x-1)^2+(3x-8)^2=5$
整理すると　$x^2-5x+6=0$　　よって　$(x-2)(x-3)=0$
ゆえに　$x=2,\ 3$
②から，$x=2$ のとき　$y=0$，$x=3$ のとき　$y=3$
よって，円①と直線②の交点の座標は　$(2,\ 0)$，$(3,\ 3)$
弦の長さを l とすると　$l=\sqrt{(3-2)^2+(3-0)^2}=\sqrt{10}$
また，弦の中点の座標は　$\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$

7

2つの円 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$，$x^2+y^2-6x+5=0$ の2つの交点と原点を通る円の方程式を求めよ。

解説

k を定数として，方程式

$$x^2+y^2-2x-2y+1+k(x^2+y^2-6x+5)=0 \quad \cdots\cdots ①$$

を考えると，①の表す図形は2つの円の交点を通る。
これが原点を通るとき，$x=y=0$ を代入して　$1+5k=0$

したがって　$k=-\dfrac{1}{5}$

これを①に代入して整理すると

$2x^2+2y^2-2x-5y=0$　　これが求める円の方程式である。

8

次の条件を満たす点Pの軌跡を求めよ。
(1)　3点O $(0,\ 0)$，A $(1,\ 3)$，B $(3,\ 2)$ に対して，$AP^2+BP^2+9=OP^2$ を満たす点P
(2)　2点O $(0,\ 0)$，A $(6,\ 0)$ からの距離の比が $2:1$ である点P

解説

点Pの座標を $(x,\ y)$ とする。
(1)　条件から　$(x-1)^2+(y-3)^2+(x-3)^2+(y-2)^2+9=x^2+y^2$
整理すると　$x^2+y^2-8x-10y+32=0$
すなわち　$(x-4)^2+(y-5)^2=9$ ……①
よって，点Pは円①にある。
逆に，この円①上の任意の点は，条件を満たす。
したがって，求める軌跡は　円 $(x-4)^2+(y-5)^2=9$
(2)　$OP:AP=2:1$ から　$OP=2AP$
すなわち　$OP^2=4AP^2$
ゆえに　$x^2+y^2=4\{(x-6)^2+y^2\}$
整理して　$x^2+y^2-16x+48=0$
変形して　$(x-8)^2+y^2=16$ ……①
よって，点Pは円①上にある。
逆に，この円①上の任意の点は，条件を満たす。
したがって，求める軌跡は　円 $(x-8)^2+y^2=16$

9

2点A $(5,\ 0)$，B $(7,\ -6)$ と円 $x^2+y^2=9$ 上の点Qを頂点とする $\triangle ABQ$ の重心Pの軌跡を求めよ。

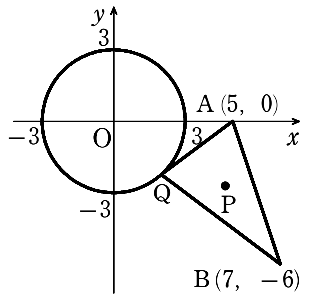
解説

点Qの座標を $(s,\ t)$ とし，点Pの座標を $(x,\ y)$ とする。
点Qは直線AB上にないから，常に $\triangle ABQ$ は存在する。
Qは円 $x^2+y^2=9$ 上にあるから

$s^2+t^2=9$ ……①

また，Pは $\triangle ABQ$ の重心であるから

$$x=\frac{5+7+s}{3},\quad y=\frac{0-6+t}{3}$$



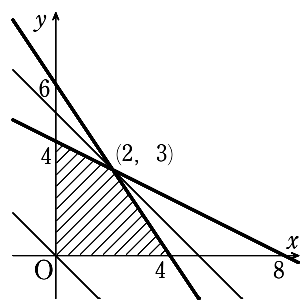
すなわち　$s=3x-12$，$t=3y+6$
これを①に代入して　$(3x-12)^2+(3y+6)^2=9$
ゆえに　$(x-4)^2+(y+2)^2=1$ ……②
よって，点Pは円②上にある。
逆に，円②上の任意の点は，条件を満たす。
したがって，求める軌跡は　円 $(x-4)^2+(y+2)^2=1$

10

x，y が4つの不等式 $x\geqq0$，$y\geqq0$，$3x+2y\leqq12$，$x+2y\leqq8$ を満たすとき，次の式の最大値と最小値，およびそのときの x，y の値を求めよ。
(1)　$x+y$　　　(2)　$2x+5y$

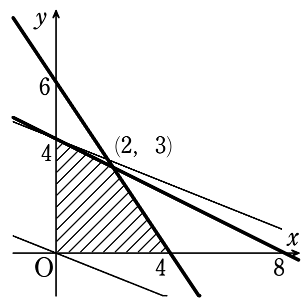
解説

連立方程式 $3x+2y=12$，$x+2y=8$ を解くと
$x=2$，$y=3$
であるから，与えられた連立不等式の表す領域は，4点 $(0,\ 0)$，$(4,\ 0)$，$(0,\ 4)$，$(2,\ 3)$ を頂点とする四角形の内部および周である。



(1)　$x+y=k$ ……①とおくと，これは傾き -1，y 切片 k の直線を表す。
図から，直線①が点 $(2,\ 3)$ を通るとき，k の値は最大となる。
このとき　$k=2+3=5$
また，直線①が点 $(0,\ 0)$ を通るとき，k の値は最小となる。
このとき　$k=0$
よって，$x=2$，$y=3$ のとき最大値5；
$x=0$，$y=0$ のとき最小値0

(2)　$2x+5y=k$ ……②とおくと，これは傾き $-\dfrac{2}{5}$，y 切片 $\dfrac{k}{5}$ の直線を表す。



図から，直線②が点 $(0,\ 4)$ を通るとき，k の値は最大となる。
このとき　$k=2\cdot0+5\cdot4=20$
また，直線②が点 $(0,\ 0)$ を通るとき，k の値は最小となる。このとき　$k=0$
よって，$x=0$，$y=4$ のとき最大値20；
$x=0$，$y=0$ のとき最小値0