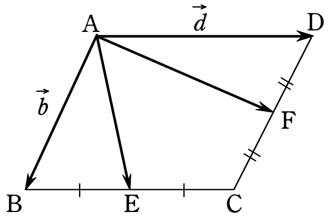
1 ベクトルの基本演算(1)

平行四辺形ABCDにおいて，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする。辺BC，CDの中点をそれぞれE，Fとするとき

(1) $\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AF}$ をそれぞれ $\vec{b}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

(2) $\vec{b}$，$\vec{d}$ をそれぞれ $\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AF}$ を用いて表せ。



解説

(1) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

よって　$\overrightarrow{AE}=\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{d}$ ……①

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

よって　$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{d}$ ……②

(2) ①×2から　$2\vec{b}+\vec{d}=2\overrightarrow{AE}$ ……③

②×2から　$\vec{b}+2\vec{d}=2\overrightarrow{AF}$ ……④

③×2−④から　$3\vec{b}=4\overrightarrow{AE}-2\overrightarrow{AF}$　よって　$\vec{b}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AE}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$

③−④×2から　$-3\vec{d}=2\overrightarrow{AE}-4\overrightarrow{AF}$　よって　$\vec{d}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AF}$

注意

ベクトルの合成・分解

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$　$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$　$\overrightarrow{AA}=\vec{0}$　$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$

2 ベクトルの基本演算(2)

正六角形ABCDEFにおいて，中心をO，辺CDを2：1に内分する点をP，辺EFの中点をQとする。$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，ベクトル $\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{CE}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{QP}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

解説

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=\vec{b}+\vec{a}=\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OF}=-\vec{b}-\vec{a}=-\vec{a}-\vec{b}$

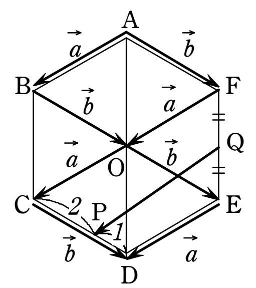
$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OE}=-\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FC}=\vec{b}+2\vec{a}=2\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{ED}=2\vec{b}+\vec{a}=\vec{a}+2\vec{b}$

$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{QE}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$

$=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})+\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}=\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}$



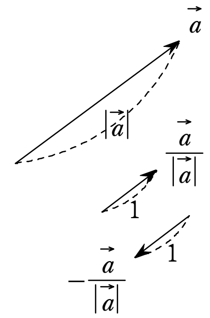
3 単位ベクトル

$|\vec{a}|=7$ のとき，$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルを求めよ。

解説

$\vec{a}$ と同じ向きで大きさが1のものは　$\frac{1}{7}\vec{a}$

$\vec{a}$ と反対向きで大きさが1のものは　$-\frac{1}{7}\vec{a}$



注意

単位ベクトルとは大きさが1のベクトル。

同じ向きと反対向きの2つある。

$\vec{a}$と平行で同じ向きの単位ベクトル　$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

$\vec{a}$と平行で反対向きの単位ベクトル　$-\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

4 ベクトルの成分

4点A(2, −3)，B(−3, 1)，C(−1, −4)，D(9, a)がある。

(1) $\overrightarrow{AB}$，$-2\overrightarrow{AC}+5\overrightarrow{BC}$ をそれぞれ成分表示せよ。

(2) $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{CD}$ であるとき，a の値を求めよ。

解説

(1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-3,\ 1)-(2,\ -3)=(-3-2,\ 1-(-3))=(-5,\ 4)$

また　$\overrightarrow{AC}=(-1-2,\ -4-(-3))=(-3,\ -1)$

$\overrightarrow{BC}=(-1-(-3),\ -4-1)=(2,\ -5)$

よって　$-2\overrightarrow{AC}+5\overrightarrow{BC}=-2(-3,\ -1)+5(2,\ -5)=(6,\ 2)+(10,\ -25)$

$=(6+10,\ 2-25)=(16,\ -23)$

(2) $\overrightarrow{CD}=(9-(-1),\ a-(-4))=(10,\ a+4)$

$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{CD}$ であるから，$\overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{AB}$ となる実数 k がある。

よって　$(10,\ a+4)=k(-5,\ 4)$　ゆえに　$(10,\ a+4)=(-5k,\ 4k)$

したがって　$10=-5k$ ……①，$a+4=4k$ ……②

①から　$k=-2$　よって，②から　$a=4\cdot(-2)-4=-12$

注意

点の座標が与えられたら原点からのベクトル成分が与えられたと考える。

例えば，A(2, −3)と与えられたら，$\overrightarrow{OA}=(2,\ -3)$が与えられたことに等しい。

ゆえに，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$なので点Bと点Aの座標で$\overrightarrow{AB}$の成分を計算することができる。

5 ベクトルの分解

$\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(2,\ 1)$ であるとき，$\vec{c}=(11,\ 10)$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ。

解説

$\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおくと　$(11,\ 10)=s(1,\ 2)+t(2,\ 1)$

すなわち　$(11,\ 10)=(s+2t,\ 2s+t)$

ゆえに　$\begin{cases}s+2t=11\\2s+t=10\end{cases}$　よって　$s=3,\ t=4$

ゆえに　$\vec{c}=3\vec{a}+4\vec{b}$

注意

「$\vec{c}$を$s\vec{a}+t\vec{b}$の形で表せ」と問われる場合もあるが、

本問題のように問題文の文末が「$\vec{c}$を$\vec{a}$と$\vec{b}$で表せ」となると正答率がぐっと下がる。

「$\vec{c}$を$\vec{a}$と$\vec{b}$で表せ」と問われても$\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$とおけるように覚えておこう。

6 ベクトルの平行条件

2つのベクトル $\vec{a}=(3,\ -1)$，$\vec{b}=(7-2t,\ -5+t)$ が平行になるように，t の値を定めよ。

解説

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ であるから，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行になるための条件は，$\vec{b}=k\vec{a}$ を満たす実数 k が存在することである。

よって　$(7-2t,\ -5+t)=k(3,\ -1)$

すなわち　$(7-2t,\ -5+t)=(3k,\ -k)$

ゆえに　$7-2t=3k$ ……①，$-5+t=-k$ ……②

①+②×3から　$-8+t=0$

したがって　$t=8$

別解　$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ であるから，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行になるための条件は

$3\cdot(-5+t)-(-1)\cdot(7-2t)=0$

よって　$-15+3t+7-2t=0$　したがって　$t=8$

注意

ベクトルの平行条件

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき　$\vec{a}/\!/\vec{b}$ ⇔ $\vec{b}=k\vec{a}$ となる実数 k がある

7 ベクトルの大きさと最小値

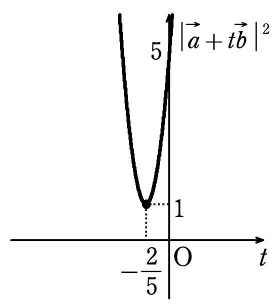
$\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(3,\ 4)$ に対して，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ は $t=$ ア $\boxed{}$ のとき最小値 イ $\boxed{}$ をとる。

解説

$\vec{a}+t\vec{b}=(2,\ 1)+t(3,\ 4)=(2+3t,\ 1+4t)$ から

$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=(2+3t)^2+(1+4t)^2$

$=25t^2+20t+5=25\left(t+\frac{2}{5}\right)^2+1$



ゆえに，$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ は $t=-\frac{2}{5}$ のとき最小値1をとる。

$|\vec{a}+t\vec{b}|\geqq 0$ であるから，このとき $|\vec{a}+t\vec{b}|$ も最小となる。

よって，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ は $t=$ ア $-\frac{2}{5}$ のとき最小値 $\sqrt{1}=$ イ 1 をとる。

注意

$|s\vec{a}+t\vec{b}|$の形が与えられたら2乗する。$|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$なので

$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=(\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{a}+t\vec{b})=|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}+t\vec{b}\cdot\vec{a}+|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

（普段は$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$と簡単に展開してよい）

8 ベクトルの内積(1)

$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 30° であるとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，$|3\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求めよ。

解説

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos30°=\sqrt{3}\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3$

よって　$|3\vec{a}-\vec{b}|^2=(3\vec{a}-\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})=9|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=9\times(\sqrt{3})^2-6\times3+2^2=13$

$|3\vec{a}-\vec{b}|\geqq0$ であるから　$|3\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$

注意

$|3\vec{a}-\vec{b}|$の値を求めるには2乗する。

$\vec{a}\cdot\vec{b}$の値が必要になるので前半部分の条件で求めておく。

9 ベクトルの内積(2)

ベクトル $\vec{a}=(\sqrt{3},\ 1)$ と 30° の角をなす単位ベクトルを求めよ。

解説

求める単位ベクトルを $\vec{e}=(x,\ y)$ とする。

ここで　$|\vec{a}|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$,　$|\vec{e}|=1$,　$\vec{a}\cdot\vec{e}=\sqrt{3}\times x+1\times y=\sqrt{3}x+y$

$\vec{a}\cdot\vec{e}=|\vec{a}||\vec{e}|\cos30°$ であるから　$\sqrt{3}x+y=2\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

よって　$y=\sqrt{3}(1-x)$　……①

$|\vec{e}|=1$ であるから　$|\vec{e}|^2=1^2$　　よって　$x^2+y^2=1$

① を代入して　$x^2+3(1-x)^2=1$　　整理すると　$2x^2-3x+1=0$

ゆえに　$(x-1)(2x-1)=0$　　したがって　$x=1,\ \frac{1}{2}$

① から　$x=1$ のとき　$y=0$,　$x=\frac{1}{2}$ のとき　$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$

したがって，求めるベクトルは　$(1,\ 0)$ または $\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

注意

単位ベクトルは大きさ1のベクトル。

なす角ときたら内積。

ベクトルの内積

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0°\leqq\theta\leqq180°)$ とすると

①$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

②$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき　$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

※成分が与えられたときは②を忘れないようにしよう。

10 ベクトルの内積(3)

$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-4\vec{b}|=7$ のとき，$\vec{a}+t\vec{b}$，$\vec{a}+\vec{b}$ が垂直になるように，t の値を求めよ。

解説

$|\vec{a}-4\vec{b}|=7$ であるから　$|\vec{a}-4\vec{b}|^2=7^2$

よって　$|\vec{a}|^2-8\vec{a}\cdot\vec{b}+16|\vec{b}|^2=49$　　ゆえに　$3^2-8\vec{a}\cdot\vec{b}+16\times2^2=49$

したがって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3$

$(\vec{a}+t\vec{b})\perp(\vec{a}+\vec{b})$ となるための条件は　$(\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=0$

すなわち　$|\vec{a}|^2+(1+t)\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=0$

よって　$3^2+(1+t)\times3+t\times2^2=0$

したがって　$t=-\frac{12}{7}$

注意

垂直ときたら内積0

ベクトルの垂直条件

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき　$\vec{a}\perp\vec{b}$ ⇔ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

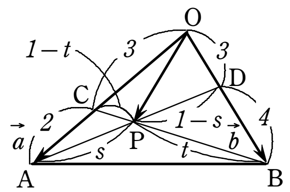
11 位置ベクトル

△OAB において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。辺 OA を 3 : 2 に内分する点を C，辺 OB を 3 : 4 に内分する点を D，線分 AD と BC との交点を P とし，直線 OP と辺 AB との交点を Q とする。次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{OP}$　　(2) $\overrightarrow{OQ}$

解説

(1) AP : PD $=s:(1-s)$，BP : PC $=t:(1-t)$ とすると



$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OD}=(1-s)\vec{a}+\frac{3}{7}s\vec{b}$,

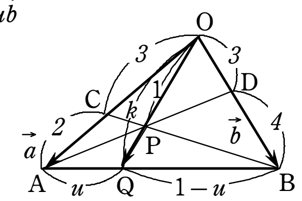
$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OC}+(1-t)\overrightarrow{OB}=\frac{3}{5}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

よって　$(1-s)\vec{a}+\frac{3}{7}s\vec{b}=\frac{3}{5}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから　$1-s=\frac{3}{5}t$，$\frac{3}{7}s=1-t$

これを解いて　$s=\frac{7}{13}$，$t=\frac{10}{13}$　　したがって　$\overrightarrow{OP}=\frac{6}{13}\vec{a}+\frac{3}{13}\vec{b}$

(2) AQ : QB $=u:(1-u)$ とすると　$\overrightarrow{OQ}=(1-u)\vec{a}+u\vec{b}$



また，点 Q は直線 OP 上にあるから，$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}$ とすると，(1) の結果から

$\overrightarrow{OQ}=k\left(\frac{6}{13}\vec{a}+\frac{3}{13}\vec{b}\right)=\frac{6}{13}k\vec{a}+\frac{3}{13}k\vec{b}$

よって　$(1-u)\vec{a}+u\vec{b}=\frac{6}{13}k\vec{a}+\frac{3}{13}k\vec{b}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ であるから　$1-u=\frac{6}{13}k$，$u=\frac{3}{13}k$

これを解いて　$k=\frac{13}{9}$，$u=\frac{1}{3}$　　したがって　$\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

注意

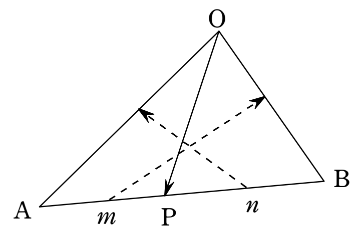
◆内分点の公式

線分ABを$m:n$に内分する点Pは

$\overrightarrow{OP}=\frac{n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m+n}$

特に，線分ABを $t:(1-t)$ に内分する点Pは

$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

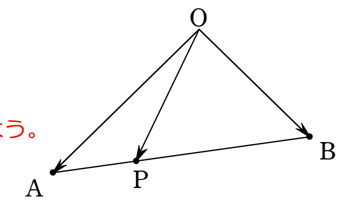


◆3点が一直線上にある場合は以下の性質が成り立つ。

3点A,P,Bが一直線上にあるとき

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ で $s+t=1$ が成り立つ

「3点が一直線上のときは係数の和が1」と覚えよう。



別解　3点が一直線上にあることから（直線のベクトル方程式の利用）

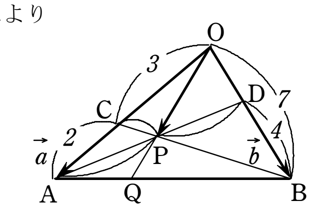
(2) $\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}=\frac{6}{13}k\vec{a}+\frac{3}{13}k\vec{b}$ とおくと，Q,A,Bは一直線上にあるから

$\frac{6}{13}k+\frac{3}{13}k=1$　　よって　$k=\frac{13}{9}$

ゆえに　$\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

別解　チェバ・メネラウスの定理の利用

(1) △OAD と直線 BC について，メネラウスの定理により



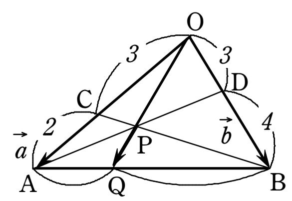
$\frac{OC}{CA}\cdot\frac{AP}{PD}\cdot\frac{DB}{BO}=1$　　よって　$\frac{3}{2}\cdot\frac{AP}{PD}\cdot\frac{4}{7}=1$

ゆえに　$\frac{AP}{PD}=\frac{7}{6}$　　すなわち　AP : PD $=7:6$

よって　$\overrightarrow{OP}=\frac{6\overrightarrow{OA}+7\overrightarrow{OD}}{7+6}=\frac{1}{13}\left(6\vec{a}+7\cdot\frac{3}{7}\vec{b}\right)$

$=\frac{6}{13}\vec{a}+\frac{3}{13}\vec{b}$

(2) △OAB において，チェバの定理により



$\frac{OC}{CA}\cdot\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BD}{DO}=1$　　よって　$\frac{3}{2}\cdot\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{4}{3}=1$

ゆえに　$\frac{AQ}{QB}=\frac{1}{2}$　　すなわち　AQ : QB $=1:2$

よって　$\overrightarrow{OQ}=\frac{2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{1+2}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

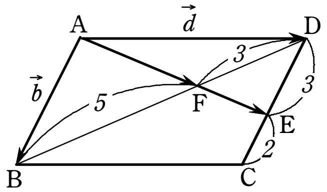
12 3点が一直線上

(1)　平行四辺形 ABCD において，辺 CD を 2 : 3 に内分する点を E，対角線 BD を 5 : 3 に内分する点を F とする。3 点 A，F，E は一直線上にあることを証明せよ。

(2)　△ABC の辺 BC，CA，AB をそれぞれ $m : n$ $(m>0,\ n>0)$ に内分する点を P，Q，R とすると △ABC と △PQR の重心は一致することを示せ。

解説

(1)　$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とすると



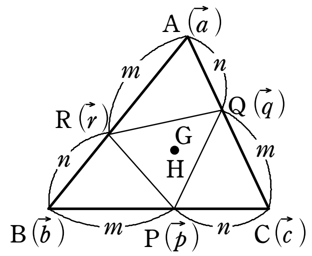
$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\vec{d}+\frac{3}{5}\vec{b}=\frac{3\vec{b}+5\vec{d}}{5}$$

$$\overrightarrow{AF}=\frac{3\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AD}}{5+3}=\frac{3\vec{b}+5\vec{d}}{8}$$

よって　$\overrightarrow{AF}=\dfrac{5}{8}\overrightarrow{AE}$

ゆえに，3 点 A，F，E は一直線上にある。

(2)　$A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$，$P(\vec{p})$，$Q(\vec{q})$，$R(\vec{r})$ とし，△ABC，△PQR の重心をそれぞれ $G(\vec{g})$，$H(\vec{h})$ と



すると　$\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$　……①

また　$\vec{p}=\dfrac{n\vec{b}+m\vec{c}}{m+n}$，$\vec{q}=\dfrac{n\vec{c}+m\vec{a}}{m+n}$，$\vec{r}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$

ゆえに　$\vec{h}=\dfrac{\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}}{3}$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{n\vec{b}+m\vec{c}}{m+n}+\frac{n\vec{c}+m\vec{a}}{m+n}+\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{(m+n)(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})}{m+n}$$

$$=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}\quad\cdots\cdots②$$

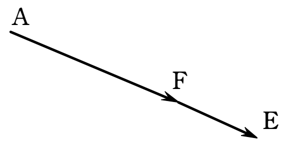
①，② から　$\vec{g}=\vec{h}$

よって，点 G と点 H は一致するから，△ABC と △PQR の重心は一致する。

注意

$\boxed{3\text{点 A, F, E が一直線上にある}}$

$\boxed{\Leftrightarrow\ \overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AE}\text{となる定数}k\text{が存在}}$



したがって(1)で3 点 A，F，E が一直線上にあることを証明するには

$\overrightarrow{AF}$と$\overrightarrow{AE}$を計算すればよい。

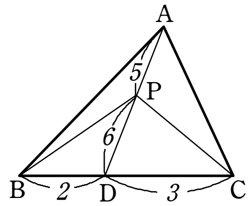
13 三角形の面積比

(1)　△ABC と点 P が $6\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ を満たすとき，点 P はどのような位置にあるか。

(2)　△PAB，△PBC，△PCA の面積の比を求めよ。

解説

(1)　等式を変形すると



$$-6\overrightarrow{AP}+3(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\vec{0}$$

よって　$11\overrightarrow{AP}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{11}(3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC})$$

ゆえに　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{5}{11}\cdot\dfrac{3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{5}$

辺 BC を 2 : 3 に内分する点を D とすると

$$\overrightarrow{AP}=\frac{5}{11}\overrightarrow{AD}$$

したがって，辺 BC を 2 : 3 に内分する点を D とすると，点 P は線分 AD を 5 : 6 に内分する位置にある。

(2)　△ABC の面積を S とすると

$$△PAB=\frac{5}{11}\cdot△ABD=\frac{5}{11}\cdot\frac{2}{5}\cdot△ABC=\frac{2}{11}S$$

$$△PBC=\frac{6}{11}\cdot△ABC=\frac{6}{11}S$$

$$△PCA=\frac{5}{11}\cdot△ACD=\frac{5}{11}\cdot\frac{3}{5}\cdot△ABC=\frac{3}{11}S$$

ゆえに　$△PAB : △PBC : △PCA=\dfrac{2}{11}S : \dfrac{6}{11}S : \dfrac{3}{11}S=2 : 6 : 3$

注意

点の位置を考える問題は始点を三角形の頂点にすればよい。今回は始点をAにした。

（始点をOにしてもいいが難しくなる）

$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{11}(3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC})$　から　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{5}{11}\cdot\dfrac{3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{5}$　にする変形が重要。

内分点を見抜くために$3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$の係数を足した5を強引に分母に作る。

14 直線のベクトル方程式

ベクトルを用いて，次の直線の方程式を求めよ。

(1)　点 A (1，2) を通り，ベクトル $\vec{d}=(-6,\ 2)$ に平行な直線

(2)　2 点 A (1，2)，B (3，1) を通る直線

(3)　点 A (1，2) を通り，ベクトル $\vec{n}=(1,\ -2)$ に垂直な直線

解説

原点を O，直線上の任意の点を P $(x,\ y)$，t を実数とする。

(1)　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\vec{d}$ から　$(x,\ y)=(1,\ 2)+t(-6,\ 2)=(1-6t,\ 2+2t)$

よって　$\begin{cases} x=1-6t & \cdots\cdots① \\ y=2+2t & \cdots\cdots② \end{cases}$　　①＋②×3 から　$x+3y=7$

(2)　$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ から

$(x,\ y)=(1-t)(1,\ 2)+t(3,\ 1)=(1+2t,\ 2-t)$

よって　$\begin{cases} x=1+2t & \cdots\cdots① \\ y=2-t & \cdots\cdots② \end{cases}$　　①＋②×2 から　$x+2y=5$

(3)　$\overrightarrow{AP}=\vec{0}$ または $\vec{n}\perp\overrightarrow{AP}$ であるから　$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0$

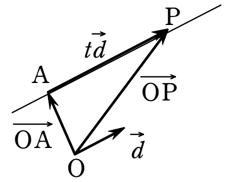
ここで　$\overrightarrow{AP}=(x-1,\ y-2)$

よって　$1\times(x-1)+(-2)\times(y-2)=0$　　したがって　$x-2y+3=0$

注意

直線のベクトル方程式

①通る1点と方向ベクトルがわかっているとき　$\boxed{\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\vec{d}}$

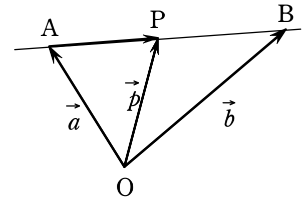


$\vec{d}$：直線APの方向ベクトル（直線APと平行なベクトル）

A：通る1点

②通る2点がわかっているとき　$\boxed{\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}}$

$\boxed{\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}\quad(\alpha+\beta=1)}$

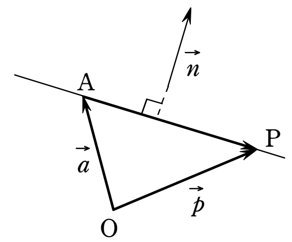


$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

③通る1点と法線ベクトルがわかっているとき　$\boxed{a(x-x_1)+b(y-y_1)=0}$



$\vec{n}\perp\overrightarrow{AP}$なので$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0$

$\vec{n}=(a,\ b)$，$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}$

$=(x,\ y)-(x_1,\ y_1)$

$=(x-x_1,\ y-y_1)$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=(a,\ b)\cdot(x-x_1,\ y-y_1)$

$=a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$

15 点の存在範囲

異なる2点A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$がある。点P$(\vec{p})$に対し，$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ (s，tは実数）と表されるとき，次の条件を満たす点Pの存在範囲を求めよ。

(1) $s+t=3$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$　　(2) $s+t\leqq 1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$

解説

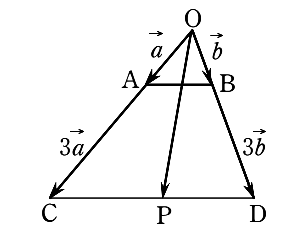
(1) $s+t=3$より　$\frac{s}{3}+\frac{t}{3}=1$

$\frac{s}{3}=s'$，$\frac{t}{3}=t'$ とおくと　$s'+t'=1$，$s'\geqq 0$，$t'\geqq 0$

$\vec{p}=\frac{s}{3}(3\vec{a})+\frac{t}{3}(3\vec{b})$ であるから

$\vec{p}=s'(3\vec{a})+t'(3\vec{b})$，$s'+t'=1$，$s'\geqq 0$，$t'\geqq 0$

よって，$\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{OB}$ であるような点C，Dをとると，点P$(\vec{p})$の存在範囲は線分CDである。



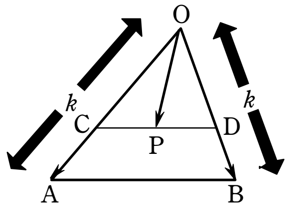
(2) $s+t=k$ $(k\neq 0)$ とすると

$\vec{p}=\frac{s}{k}(k\vec{a})+\frac{t}{k}(k\vec{b})$

$\frac{s}{k}=s'$，$\frac{t}{k}=t'$，$\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OD}=k\overrightarrow{OB}$ とおくと

$\vec{p}=s'\overrightarrow{OC}+t'\overrightarrow{OD}$，$s'+t'=1$，$s'\geqq 0$，$t'\geqq 0$

kが定数のときPは線分CD上を動く。
また，$k=0$なら$s=t=0$でPはOに一致する。
ここで，kの値が0から1まで変化すると，点C，Dは，CD∥ABの状態を保ちながら，それぞれ線分OA，OB上を，OからA，OからBまで動く。



よって，点P$(\vec{p})$の存在範囲は△OABの周および内部である。

注意

点Pが線分AB上にある　⇔　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$　$(s+t=1,\ s\geqq 0,\ t\geqq 0)$　…①

点の存在範囲の問題では係数の和を1にすることを目指す。

(1)では$s+t=3$なので両辺を3で割って$\frac{s}{3}+\frac{t}{3}=1$というように和が1の形を作る。

したがって与式$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$を$\overrightarrow{OP}=\frac{s}{3}(3\overrightarrow{OA})+\frac{t}{3}(3\overrightarrow{OB})$と変形すれば係数の和が1の形になり，①の関係を利用することが出来る。

点Pが△OABの周および内部にある　⇔　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$　$(s+t\leqq 1,\ s\geqq 0,\ t\geqq 0)$

(2)のように$s+t\leqq 1$といった不等式の範囲が与えられた点の存在範囲の問題は，$s+t=k$というようにkとおくのが考えやすい。

与式$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$を$\overrightarrow{OP}=\frac{s}{k}(k\overrightarrow{OA})+\frac{t}{k}(k\overrightarrow{OB})$と変形するところがポイント。

解答の下線部の箇所はある程度慣れておこう。

ちなみに本問題にはないが，

点Pが平行四辺形OACBの周および内部にある⇔$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$　$(0\leqq s\leqq 1,\ 0\leqq t\leqq 1)$

という性質もおさえておきたい。

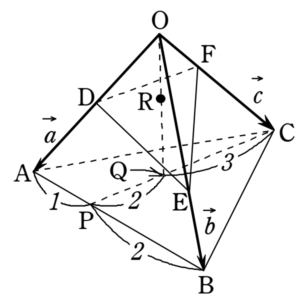
16 4点が同一平面上にあるとき(1)

四面体OABCにおいて，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$とする。

(1) 線分ABを1:2に内分する点をPとし，線分PCを2:3に内分する点をQとする。$\overrightarrow{OQ}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。

(2) D，E，Fはそれぞれ線分OA，OB，OC上の点で，$\mathrm{OD}=\frac{1}{2}\mathrm{OA}$，$\mathrm{OE}=\frac{2}{3}\mathrm{OB}$，$\mathrm{OF}=\frac{1}{3}\mathrm{OC}$とする。3点D，E，Fを含む平面と線分OQの交点をRとするとき，$\overrightarrow{OR}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。

解説

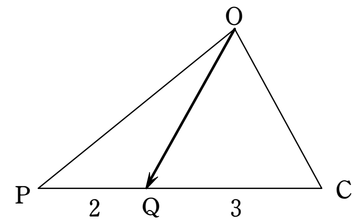


(1) $\overrightarrow{OQ}=\frac{3\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{OC}}{2+3}$

$=\frac{3}{5}\overrightarrow{OP}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OC}=\frac{3}{5}\cdot\frac{2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{1+2}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OC}$

$=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}$

注意



空間図形の問題は平面図形で考える。(1)で$\overrightarrow{OQ}$を求めるには△OPCに注目する。

$\overrightarrow{OP}$は△OABから求める。

(2) 点Rは直線OQ上にあるから，kを実数とすると
$\overrightarrow{OR}=k\overrightarrow{OQ}$ と表される。よって，(1)から

$\overrightarrow{OR}=\frac{2}{5}k\vec{a}+\frac{1}{5}k\vec{b}+\frac{2}{5}k\vec{c}$　…… ①

$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{OE}=\frac{2}{3}\vec{b}$，$\overrightarrow{OF}=\frac{1}{3}\vec{c}$ であるから

$\overrightarrow{OR}=\frac{2}{5}k\cdot 2\overrightarrow{OD}+\frac{1}{5}k\cdot\frac{3}{2}\overrightarrow{OE}+\frac{2}{5}k\cdot 3\overrightarrow{OF}$

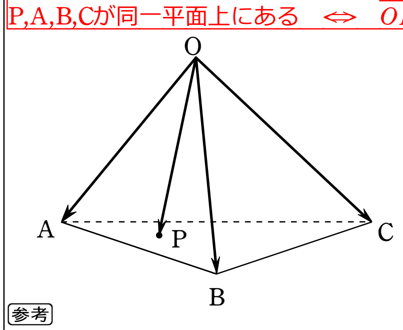
$=\frac{4}{5}k\overrightarrow{OD}+\frac{3}{10}k\overrightarrow{OE}+\frac{6}{5}k\overrightarrow{OF}$

点Rは平面DEF上にあるから　$\frac{4}{5}k+\frac{3}{10}k+\frac{6}{5}k=1$　　よって　$k=\frac{10}{23}$

①に代入して　$\overrightarrow{OR}=\frac{4}{23}\vec{a}+\frac{2}{23}\vec{b}+\frac{4}{23}\vec{c}$

注意

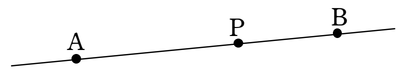
P,A,B,Cが同一平面上にある　⇔　$\overrightarrow{OP}=l\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC}$で$l+m+n=1$



参考

直線AB上に点Pがある(A,P,Bが一直線上にある)　⇔　$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$　$(\alpha+\beta=1)$

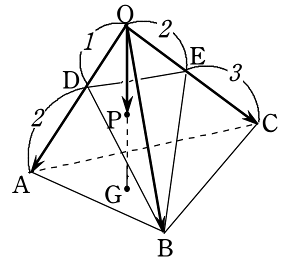
とよく似ているので合わせて覚えよう。



17 4点が同一平面上にあるとき(2)

四面体OABCにおいて，△ABCの重心をG，辺OAを1:2に内分する点をD，辺OCを2:3に内分する点をEとする。直線OGと平面DBEの交点をPとするとき，OP:OGを求めよ。

解説



点Pは平面DBE上にあるから，$\overrightarrow{DP}=s\overrightarrow{DB}+t\overrightarrow{DE}$となる実数$s$，$t$がある。

よって　$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OD}=s(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD})+t(\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OD})$

ゆえに　$\overrightarrow{OP}=(1-s-t)\overrightarrow{OD}+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OE}$

$=(1-s-t)\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+t\cdot\frac{2}{5}\overrightarrow{OC}$

$=\frac{1-s-t}{3}\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+\frac{2}{5}t\overrightarrow{OC}$

また，点Pは直線OG上にあるから，$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OG}$となる実数$k$がある。

よって　$\overrightarrow{OP}=k\left(\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}\right)=\frac{k}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{k}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{k}{3}\overrightarrow{OC}$

ゆえに　$\frac{1-s-t}{3}\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+\frac{2}{5}t\overrightarrow{OC}=\frac{k}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{k}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{k}{3}\overrightarrow{OC}$

4点O，A，B，Cは同じ平面上にないから

$\frac{1-s-t}{3}=\frac{k}{3}$　…… ①，　$s=\frac{k}{3}$，$\frac{2}{5}t=\frac{k}{3}$　…… ②

② から　$t=\frac{5}{6}k$　　$s=\frac{k}{3}$，$t=\frac{5}{6}k$ を ① に代入して　$k=\frac{6}{13}$

よって，$\overrightarrow{OP}=\frac{6}{13}\overrightarrow{OG}$ であるから　OP : OG = 6 : 13

別解　点Pは直線OG上にあるから，$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OG}$となる実数$k$がある。

よって　$\overrightarrow{OP}=k\left(\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}\right)=\frac{k}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{k}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{k}{3}\overrightarrow{OC}$

$=\frac{k}{3}\cdot 3\overrightarrow{OD}+\frac{k}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{k}{3}\cdot\frac{5}{2}\overrightarrow{OE}$

$=k\overrightarrow{OD}+\frac{k}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{5}{6}k\overrightarrow{OE}$

←Pは平面DBE上にあるので，$\overrightarrow{OP}$を$\overrightarrow{OD}$と$\overrightarrow{OB}$と$\overrightarrow{OE}$で表すことを目指す

点Pは平面DBE上にあるから　$k+\frac{k}{3}+\frac{5}{6}k=1$　　ゆえに　$k=\frac{6}{13}$

よって，$\overrightarrow{OP}=\frac{6}{13}\overrightarrow{OG}$ であるから　OP : OG = 6 : 13

18 総合問題(1)

正四面体OABCにおいて，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。辺OAを4：3に内分する点をP，辺BCを5：3に内分する点をQとする。（センター試験）

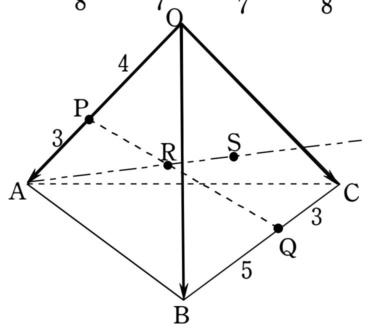
(1) $\overrightarrow{PQ}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(2) 線分PQの中点をRとし，直線ARが△OBCの定める平面と交わる点をSとするとき，AR:RSを求めよ。

(3) $\cos\angle AOQ$ を求めよ。

解説

(1) $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\dfrac{3\vec{b}+5\vec{c}}{8}-\dfrac{4}{7}\vec{a}=\dfrac{-4}{7}\vec{a}+\dfrac{3}{8}\vec{b}+\dfrac{5}{8}\vec{c}$



(2) $\overrightarrow{AS}=t\overrightarrow{AR}$ とすると　← A,R,Sは一直線上にあるから

$$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AR}=\vec{a}+t(\overrightarrow{OR}-\vec{a})=\vec{a}+t\left(\frac{\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}}{2}-\vec{a}\right)$$

$$=\vec{a}+t\left(\frac{2}{7}\vec{a}+\frac{3}{16}\vec{b}+\frac{5}{16}\vec{c}-\vec{a}\right)=\left(1-\frac{5}{7}t\right)\vec{a}+\frac{3t}{16}\vec{b}+\frac{5t}{16}\vec{c}$$

点Sは△OBCの定める平面上にあるから

$1-\dfrac{5}{7}t=0$　　よって　$t=\dfrac{7}{5}$

ゆえに　$5\overrightarrow{AS}=7\overrightarrow{AR}$　　したがって　AR：AS＝ 5： 7

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos 60^\circ=\dfrac{|\vec{a}|^2}{2}$ であるから

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}=\vec{a}\cdot\left(\frac{3}{8}\vec{b}+\frac{5}{8}\vec{c}\right)=\frac{3}{8}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{5}{8}\vec{a}\cdot\vec{c}=\frac{3}{16}|\vec{a}|^2+\frac{5}{16}|\vec{a}|^2=\frac{1}{2}|\vec{a}|^2$$

また　$|\overrightarrow{OQ}|^2=\left|\dfrac{3}{8}\vec{b}+\dfrac{5}{8}\vec{c}\right|^2=\dfrac{9}{64}|\vec{a}|^2+\dfrac{30}{64}\cdot\dfrac{|\vec{a}|^2}{2}+\dfrac{25}{64}|\vec{a}|^2=\dfrac{49}{64}|\vec{a}|^2$

よって　$|\overrightarrow{OQ}|=\dfrac{7}{8}|\vec{a}|$

ゆえに　$\cos\angle AOQ=\dfrac{\frac{1}{2}|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|\cdot\frac{7}{8}|\vec{a}|}=\dfrac{4}{7}$

参考　△OAQ は OQ＝AQ の二等辺三角形である。

よって　$\cos\angle AOQ=\dfrac{\frac{1}{2}OA}{OQ}=\dfrac{4}{7}$

注意

(2)で点Sは△OBCの平面にあるので，$\overrightarrow{OS}$を表すのに$\overrightarrow{OA}$は使用しない。

よって$\vec{a}$の係数を0にする。

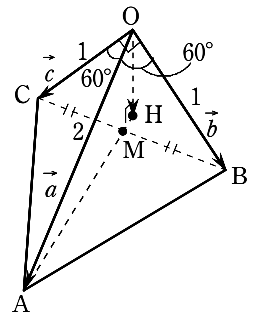
(3)はcos∠AOQを求めるには$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OQ}|\cos\angle AOQ$ なので，

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}$，$|\overrightarrow{OA}|$，$|\overrightarrow{OQ}|$を考える。

19 総合問題(2)

∠AOB＝∠AOC＝60°，∠BOC＝90°，OB＝OC＝1，OA＝2 である四面体 OABC において，頂点 O から平面 ABC に下ろした垂線の足を H とする。垂線 OH の長さを求めよ。

解説



$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。

点 H は平面 ABC 上にあるから，s，t，u を実数として

$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$，$s+t+u=1$

と表される。OH⊥(平面 ABC) から

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$

よって　$(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$　……①

$(s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$　……②

ここで　$|\vec{a}|^2=4$，$|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2=1$，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{a}=2\times1\times\cos 60^\circ=1$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

① から　$-s|\vec{a}|^2+t|\vec{b}|^2+(s-t)\vec{a}\cdot\vec{b}+u\vec{b}\cdot\vec{c}-u\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

ゆえに　$3s+u=0$　……③

同様に，② から　$3s+t=0$　……④

③，④ および $s+t+u=1$ を解いて　$s=-\dfrac{1}{5}$，$t=\dfrac{3}{5}$，$u=\dfrac{3}{5}$

したがって　$\overrightarrow{OH}=-\dfrac{1}{5}\vec{a}+\dfrac{3}{5}\vec{b}+\dfrac{3}{5}\vec{c}$

よって　$5^2|\overrightarrow{OH}|^2=|-\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2+9|\vec{b}|^2+9|\vec{c}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+18\vec{b}\cdot\vec{c}-6\vec{c}\cdot\vec{a}$

$=4+9\times1+9\times1-6\times1+18\times0-6\times1=10$

ゆえに　$|\overrightarrow{OH}|^2=\dfrac{10}{5^2}$　　したがって　$OH=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

注意

ベクトルで垂線ときたら(内積)＝0を考える。

本問題のように$\overrightarrow{OH}$と三角形が垂直のとき，

3辺のうち2辺で(内積)＝0をつくればよい。

よって$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$と$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$をつくった。

（$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$でも解答可能）