1 対数の計算(1)

次の計算をせよ。

(1) $\frac{1}{2}\log_5 2+3\log_5\sqrt{2}-\log_5 4$　　　(2) $\log_3 4\cdot\log_4 27$

解説

(1) $\frac{1}{2}\log_5 2+3\log_5\sqrt{2}-\log_5 4=\log_5 2^{\frac{1}{2}}+\log_5\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3-\log_5 2^2$

$=\log_5 2^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-2}=\log_5 2^0=\log_5 1=0$

(2) $\log_3 4\cdot\log_4 27=\log_3 4\cdot\frac{\log_3 27}{\log_3 4}=\log_3 27=\log_3 3^3=3$

注意

$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$　$(a>0,\ a\neq 1,\ M>0,\ N>0)$

$\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$　$(a>0,\ a\neq 1,\ M>0,\ N>0)$

$\log_a M^k=k\log_a M$　($a>0,\ a\neq 1,\ M>0$ で，k は実数)

2 対数の計算(2)

$(\log_3 4+\log_9 16)(\log_4 9+\log_{16} 3)$ の値を求めよ。

解説

$(\log_3 4+\log_9 16)(\log_4 9+\log_{16} 3)=\left(\log_3 4+\frac{\log_3 16}{\log_3 9}\right)\left(\frac{\log_2 9}{\log_2 4}+\frac{\log_2 3}{\log_2 16}\right)$

$=\left(2\log_3 2+\frac{4\log_3 2}{2}\right)\left(\frac{2\log_2 3}{2}+\frac{\log_2 3}{4}\right)$

$=4\log_3 2\cdot\frac{5}{4}\log_2 3=5\log_3 2\cdot\frac{1}{\log_3 2}=5$

注意

底の変換公式

$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$　　$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$　($a,\ b,\ c$ は正の数で，$a\neq 1,\ b\neq 1,\ c\neq 1$)

3 大小関係(1)

次の数の大小関係を調べよ。

(1) $\log_3 0.8$，$\log_3 5$，$\log_3 7$　　　(2) $\log_{0.2} 0.6$，$\log_{0.2} 4$，$\log_{0.2} 8$

解説

(1) 真数について　$0.8<5<7$

底 3 は 1 より大きいから　$\log_3 0.8<\log_3 5<\log_3 7$

(2) 真数について　$0.6<4<8$

底 0.2 は 1 より小さいから　$\log_{0.2} 8<\log_{0.2} 4<\log_{0.2} 0.6$

4 大小関係(2)

3 つの数 $\log_3 6$，$\log_5 10$，$\frac{3}{2}$ の大小関係を調べよ。

解説

$\log_3 6-\frac{3}{2}=\log_3 6-\log_3 3^{\frac{3}{2}}=\log_3\frac{6}{3\sqrt{3}}=\log_3\frac{2}{\sqrt{3}}>\log_3 1=0$

よって　$\log_3 6>\frac{3}{2}$　…… ①

また　$\frac{3}{2}-\log_5 10=\log_5 5^{\frac{3}{2}}-\log_5 10=\log_5\frac{5\sqrt{5}}{10}=\log_5\frac{\sqrt{5}}{2}>\log_5 1=0$

よって　$\frac{3}{2}>\log_5 10$　…… ②

①，② から　$\log_5 10<\frac{3}{2}<\log_3 6$

注意

本問題では3つの数の底を同時にそろえても比較できないので，2つずつ大小を調べる。

$\frac{3}{2}$は底を3や5にした場合，$\frac{3}{2}\log_3 3$や$\frac{3}{2}\log_5 5$になって比較しやすいことに注目して，

(i) $\log_3 6$と$\frac{3}{2}$の大小を考えるために　$\log_3 6-\frac{3}{2}$を計算する。

(ii) $\log_5 10$と$\frac{3}{2}$の大小を考えるために　$\frac{3}{2}-\log_5 10$を計算する。

（$\log_5 10-\frac{3}{2}$を計算して$\log_5 10-\frac{3}{2}<0$を示してもよい）

5 対数方程式・対数不等式(1)

次の方程式と不等式を解け。

(1) $\log_{0.2} x=-2$　　　(2) $\log_{27} x>\frac{1}{3}$

解説

(1) 方程式から　$x=0.2^{-2}$

よって　$x=\frac{1}{0.2^2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2}=25$

(2) 真数は正であるから　$x>0$　…… ①

不等式から　$\log_{27} x>\log_{27} 27^{\frac{1}{3}}$

すなわち　$\log_{27} x>\log_{27} 3$

底 27 は 1 より大きいから　$x>3$　⇐ 底が1より大きいので増加関数

これは ① を満たすから，解である。　$\log_{27}$ をとると不等号の向きはそのまま

6 対数を含む関数の最大・最小

関数 $y=(\log_2 x)^2-4\log_2 x+6$ $(1\leqq x\leqq 8)$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

解説

$\log_2 x=t$ とおく。　⇐ 置き換えたら範囲に注意！

$1\leqq x\leqq 8$であるから　$\log_2 1\leqq\log_2 x\leqq\log_2 8$

すなわち　$0\leqq t\leqq 3$　…… ①

y を t の式で表すと　$y=t^2-4t+6=(t-2)^2+2$

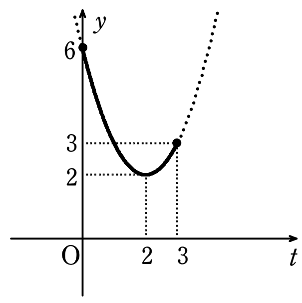
① の範囲において，y は，$t=0$ のとき最大値 6，

$t=2$ のとき最小値 2 をとる。

$t=0$ となるのは，$\log_2 x=0$ から　$x=1$

$t=2$ となるのは，$\log_2 x=2$ から　$x=4$

のときである。



よって，y は，$x=1$ のとき最大値 6，$x=4$ のとき最小値 2 をとる。

7 対数方程式・対数不等式(2)

次の方程式と不等式を解け。

(1) $5^{1-x}=2^{x+1}$　　　(2) $\log_{\frac{1}{2}} x(x+2)>-3$

解説

(1) 与式の両辺は正であるから，2 を底とする対数をとると　⇐ 数字が小さい方で

$\log_2 5^{1-x}=\log_2 2^{x+1}$

すなわち　$(1-x)\log_2 5=x+1$

よって　$(1+\log_2 5)x=\log_2 5-1$

$1+\log_2 5\neq 0$ であるから　$x=\frac{\log_2 5-1}{\log_2 5+1}$

(2) 真数は正であるから　$x(x+2)>0$

ゆえに　$x<-2,\ 0<x$　…… ①

不等式から　$\log_{\frac{1}{2}} x(x+2)>\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

すなわち　$\log_{\frac{1}{2}} x(x+2)>\log_{\frac{1}{2}} 8$　⇐ 底が0と1の間なので減少関数

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから　$x(x+2)<8$　$\log_{\frac{1}{2}}$ をとると不等号の向きが逆になる

よって　$x^2+2x-8<0$

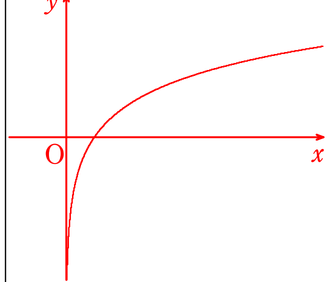
これを解いて　$-4<x<2$　…… ②

①，② から，解は　$-4<x<-2,\ 0<x<2$

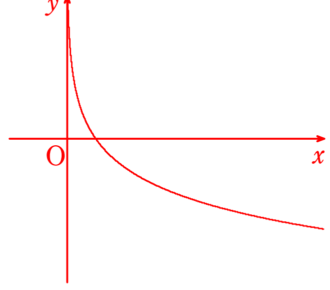
注意

$y=\log_a x$ のグラフについて

(i) $a>1$のとき



(ii) $0<a<1$のとき



底(a)が1より大きいときは増加関数

（増加関数…xが増加するとyも増加）

底(a)が0と1の間のときは減少関数

（減少関数…xが増加するとyは減少）

8 桁数と最高位の数字

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ として，次の問いに答えよ。

(1)　6^{20}は何桁の整数か。　　(2)　6^{20}の最高位の数字は何か。

ヒント

(2)　$\log_{10}6^{20}$を利用する。対数を指数に変換することにも慣れておこう。

解説

(1)　$\log_{10}6^{20}=20\log_{10}6$
$=20\log_{10}2\times3$
$=20(\log_{10}2+\log_{10}3)$
$=20(0.3010+0.4771)$
$=15.562$　…①

したがって，$15<\log_{10}6^{20}<16$

すなわち，$10^{15}<6^{20}<10^{16}$

よって，6^{20}は16桁の数

(2)　(1)の①より　$\log_{10}6^{20}=15.562$ なので $6^{20}=10^{15.562}=10^{0.562}\times10^{15}$　…②

ゆえに$10^{0.562}$の値を考えれば6^{20}の最高位の数字はわかる。

ここで$\log_{10}3=0.4771$ より$3=10^{0.4771}$

また$\log_{10}4=2\log_{10}2=0.6020$ より$4=10^{0.6020}$ であるので

$10^{0.4771}<10^{0.562}<10^{0.6020}$

すなわち$3<10^{0.562}<4$　…③

②，③より$3\times10^{15}<10^{0.562}\times10^{15}<4\times10^{15}$
$3\times10^{15}<6^{20}<4\times10^{15}$

よって，6^{20}の最高位の数字は3である。

注意

(2)　$a^p=M$　⇔　$p=\log_aM$　（ただし　$a>0$，$a\neq1$，$M>0$）を利用して，

(1)の変形$\log_{10}6^{20}=15.562$ を $6=10^{0.562}$と考えることが重要。

同様に、与えられている$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$を$2=10^{0.3010}$，$3=10^{0.4771}$

と考えることができれば　$10^{0.4771}<10^{0.562}$　つまり $3<10^{0.562}$ はわかるので，$10^{0.562}<4$で

あることを予想して$\log_{10}4$を計算することになる。

9 n桁の整数

5^xが10桁の整数となる自然数xを求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$とする。

解説

5^xが10桁の整数のとき，$10^9\leqq5^x<10^{10}$　　⇐　10^9は10桁の数。10^{10}は11桁の数。

各辺の常用対数をとると　$\log_{10}10^9\leqq\log_{10}5^x<\log_{10}10^{10}$
$9\leqq x\log_{10}5<10$　…①

ところで　$\log_{10}5=\log_{10}\dfrac{10}{2}=\log_{10}10-\log_{10}2=1-0.3010=0.6990$　…②

よって　①に②を代入して　$9\leqq0.6990\times x<10$
$$\frac{9}{0.6990}\leqq x<\frac{10}{0.6990}$$
$$12.8\cdots\leqq x<14.3\cdots$$

xは自然数であるから　$x=13,\ 14$

注意

ある数Xがn桁の数のとき，$10^{n-1}\leqq X<10^n$が成り立つ。

（10^{n-1}はn桁の数，10^nは$n+1$桁の数だから）

10 小数第何位に0でない数が現れるか

0.3^{15}を小数で表すと，小数第何位に初めて0でない数が現れるか。
ただし，$\log_{10}3=0.4771$とする。

解説

0.3^{15}の常用対数をとると

$$\log_{10}0.3^{15}=15\log_{10}\frac{3}{10}=15(\log_{10}3-\log_{10}10)$$
$$=15(0.4771-1)$$
$$=-7.8435$$

よって　$-8<\log_{10}0.3^{15}<-7$ なので

したがって，$10^{-8}<0.3^{15}<10^{-7}$

ゆえに，0.3^{15}は小数第8位に初めて0でない数が現れる。

注意

$10^{-8}<0.3^{15}<10^{-7}$　から小数第何位なのかイメージできない人は

もう少し簡単な数で考えてみよう。

例えば，$10^{-2}<X<10^{-1}$ のXはどんな値になるだろうか。

$\dfrac{1}{100}<X<\dfrac{1}{10}$　つまり $0.01<X<0.1$

したがってXは小数第2位の数に0でない数がある。

本問題では，$10^{-8}<0.3^{15}<10^{-7}$　であるので，

0.3^{15}は小数第8位の数に0でない数がある。

11 対数方程式・対数不等式(3)

次の方程式と不等式を解け。

(1)　$\log_5x+\log_5(x-4)=1$　　(2)　$\log_3x+\log_3(x+2)\leqq1$

解説

(1)　真数は正なので，$x>0$，$x>4$　よって$x>4$

$\log_5x(x-4)=\log_55$
$x(x-4)=5$
$x^2-4x-5=0$
$(x+1)(x-5)=0$
$x=-1,\ 5$

$x>4$より　$x=5$

(2)　真数は正なので，$x>0$，$x>-2$　よって$x>0$

$\log_3x(x+2)\leqq\log_33$

底が$3>1$なので　　←　底>1　のときは増加関数で

$x(x+2)\leqq3$　　　不等号の向きはそのまま

$x^2+2x-3\leqq0$

$(x+3)(x-1)\leqq0$

$-3\leqq x\leqq1$

また，$x>0$より　$0<x\leqq1$