　

1

次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=3,\ a_{n+1}=a_n+2$　　　(2)　$a_1=-5,\ a_{n+1}=3a_n$

解説

(1)　数列 $\{a_n\}$ は初項 3，公差 2 の等差数列であるから

$a_n=3+(n-1)\times2=2n+1$

(2)　数列 $\{a_n\}$ は初項 -5，公比 3 の等比数列であるから

$a_n=-5\cdot3^{n-1}$

2

次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=3,\ a_{n+1}=a_n+(-2)^n$　　　(2)　$a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+n+2$

解説

(1)　漸化式から　$a_{n+1}-a_n=(-2)^n$

よって，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項は $(-2)^n$ であるから

$n\geqq2$ のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(-2)^k=3+\dfrac{-2\{1-(-2)^{n-1}\}}{1-(-2)}$

$=\dfrac{9-2-(-2)^n}{3}=\dfrac{1}{3}\{7-(-2)^n\}$

初項は $a_1=3$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=\dfrac{1}{3}\{7-(-2)^n\}$

(2)　漸化式から　$a_{n+1}-a_n=n+2$

よって，数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項は $n+2$ であるから

$n\geqq2$ のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+2)=2+\dfrac{1}{2}n(n-1)+2(n-1)$

$=\dfrac{1}{2}n^2+\dfrac{3}{2}n=\dfrac{1}{2}n(n+3)$

初項は $a_1=2$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=\dfrac{1}{2}n(n+3)$

3

次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=2,\ a_{n+1}=3a_n-2$　　　(2)　$a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3}+2$

解説

(1)　漸化式を変形すると　$a_{n+1}-1=3(a_n-1)$

$a_n-1=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=3b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比 3 の等比数列で，初項は

$b_1=a_1-1=2-1=1$

ゆえに，数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n=1\cdot3^{n-1}=3^{n-1}$

したがって　$a_n=b_n+1=3^{n-1}+1$

(2)　漸化式を変形すると　$a_{n+1}-3=\dfrac{1}{3}(a_n-3)$

$a_n-3=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列で，初項は

$b_1=a_1-3=1-3=-2$

ゆえに，数列 $\{b_n\}$ の一般項は　$b_n=-2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=-\dfrac{2}{3^{n-1}}$

したがって　$a_n=3+b_n=3-\dfrac{2}{3^{n-1}}$

4

次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を，[　] で示されたおき換えを利用することによって求めよ。

(1)　$a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+1}$　　$\left[\dfrac{1}{a_n}=b_n\right]$

(2)　$a_1=1,\ a_{n+1}=4a_n-2^{n+1}$　　$\left[\dfrac{a_n}{2^n}=b_n\right]$

解説

(1)　$a_1=1>0$ より，漸化式の形からすべての自然数 n について $a_n>0$ である。

漸化式の両辺の逆数をとると　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{2a_n+1}{a_n}$　　よって　$\dfrac{1}{a_{n+1}}=2+\dfrac{1}{a_n}$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=b_n+2$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公差 2 の等差数列で，初項は　$b_1=\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{1}=1$

ゆえに　$b_n=1+(n-1)\times2=2n-1$　　したがって　$a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{2n-1}$

(2)　漸化式の両辺を 2^{n+1} で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=2\cdot\dfrac{a_n}{2^n}-1$

$\dfrac{a_n}{2^n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=2b_n-1$

変形すると　$b_{n+1}-1=2(b_n-1)$

よって，数列 $\{b_n-1\}$ は公比 2 の等比数列で，初項は

$b_1-1=\dfrac{a_1}{2^1}-1=\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{1}{2}$

ゆえに　$b_n-1=-\dfrac{1}{2}\cdot2^{n-1}$　　よって　$b_n=1-2^{n-2}$

したがって　$a_n=2^nb_n=2^n(1-2^{n-2})=2^n-4^{n-1}$　…… ①

注意　① において　$2^n\times(-2^{n-2})=-2^{2n-2}=-2^{2(n-1)}=-(2^2)^{n-1}=-4^{n-1}$

5

n が自然数のとき，次の等式を数学的帰納法を用いて証明せよ。

$$1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6+\cdots\cdots+n(n+3)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+5)$$

解説

この等式を ① とする。

[1]　$n=1$ のとき　(左辺)$=1\cdot4=4$　(右辺)$=\dfrac{1}{3}\cdot1\cdot2\cdot6=4$

よって，$n=1$ のとき，① が成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6+\cdots\cdots+k(k+3)=\dfrac{1}{3}k(k+1)(k+5)$

であると仮定すると，$n=k+1$ のときの ① の左辺は

$1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6+\cdots\cdots+k(k+3)+(k+1)\{(k+1)+3\}$

$=\dfrac{1}{3}k(k+1)(k+5)+(k+1)(k+4)$

$=\dfrac{1}{3}(k+1)(k^2+5k+3k+12)$

$=\dfrac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+6)$

よって　$1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6+\cdots\cdots+(k+1)\{(k+1)+3\}=\dfrac{1}{3}(k+1)\{(k+1)+1\}\{(k+1)+5\}$

したがって，$n=k+1$ のときも ① が成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① が成り立つ。

6

n が自然数のとき，次の不等式を証明せよ。

$5^n>4n$

解説

この不等式を ① とする。

[1]　$n=1$ のとき　(左辺)$=5^1=5$，(右辺)$=4\cdot1=4$

よって，$n=1$ のとき ① が成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき ① が成り立つ，すなわち

$5^k>4k$

であると仮定する。両辺に 5 をかけると

$5^{k+1}>20k$　…… ②

次に，$20k>4(k+1)$ が成り立つことを示す。

$20k-4(k+1)=4(4k-1)>0$

よって，$20k>4(k+1)$　…… ③ が成り立つ。

②，③ から　$5^{k+1}>4(k+1)$

ゆえに，$n=k+1$ のときも ① が成り立つ。

[1]，[2] から，すべての自然数 n について ① が成り立つ。