1 等差数列の一般項(1)

第3項が10，第6項が22である等差数列の初項は ア $\boxed{}$，公差は イ $\boxed{}$ である。

また，第30項は ウ $\boxed{}$，50は第 エ $\boxed{}$ 項である。

解説

与えられた数列を $\{a_n\}$ とし，その初項を a，公差を d とする。

$a_3=10$ であるから　$a+2d=10$ ……①

$a_6=22$ であるから　$a+5d=22$ ……②

①，② を解いて　$a=2,\ d=4$

よって，初項は ア2，公差は イ4 である。

また，一般項 a_n は　$a_n=2+(n-1)\times4=4n-2$

したがって　$a_{30}=4\cdot30-2=$ ウ118

更に，$a_n=50$ とすると　$4n-2=50$　よって　$n=13$

ゆえに，50 は 第 エ13 項 である。

注意

等差数列の一般項

初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n=a+(n-1)d$

2 等差数列の一般項(2)

第6項が33，第11項が63である等差数列において，第16項を求めよ。また，200より大きくなるのは第何項からか。

解説

与えられた数列を $\{a_n\}$ とし，その初項を a，公差を d とする。

$a_6=33$ であるから　$a+5d=33$ ……①

$a_{11}=63$ であるから　$a+10d=63$ ……②

①，② を解いて　$a=3,\ d=6$

よって　$a_n=3+(n-1)\times6=6n-3$

したがって　$a_{16}=6\cdot16-3=93$

また，$a_n>200$ とすると　$6n-3>200$　よって　$n>\dfrac{203}{6}=33.8\cdots\cdots$ ……①

① を満たす最小の自然数 n は　$n=34$

よって，200 より大きくなるのは第34項からである。

注意

「第6項が33，第11項が63」と与えられたら「$a_6=33$，$a_{11}=63$」というように文字で考えられるようになりましょう。

3 等差数列の和の公式

初項が -50，公差が3である等差数列において，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

(1)　第何項が初めて正になるか。

(2)　S_n が最小となる n の値を求めよ。

(3)　S_n が初めて正となる n の値を求めよ。

解説

一般項を a_n とすると　$a_n=-50+(n-1)\times3=3n-53$

(1)　$a_n>0$ とすると　$3n-53>0$　よって　$n>\dfrac{53}{3}=17.6\cdots\cdots$ ……①

① を満たす最小の自然数 n は　$n=18$

したがって，　第18項が初めて正となる。

(2)　(1)の結果から　$a_1<0,\ a_2<0,\ \cdots\cdots,\ a_{17}<0,\ a_{18}>0,\ a_{19}>0,\ \cdots\cdots$

よって，初項から第17項までの和 S_{17} が最小となる。

すなわち，$n=17$ のとき S_n が最小となる。

(3)　$S_n=\dfrac{1}{2}\cdot n\{2\cdot(-50)+(n-1)\cdot3\}=\dfrac{1}{2}n(3n-103)$

$S_n>0$ とすると　$\dfrac{1}{2}n(3n-103)>0$　$n>0$ であるから　$3n-103>0$

よって　$n>\dfrac{103}{3}=34.3\cdots\cdots$ ……②

② を満たす最小の自然数 n は　$n=35$

すなわち，$n=35$ のとき S_n が初めて正となる。

注意

(1)　$a_n>0$ となる自然数 n を考えましょう。

(2)　(1)の結果から a_{18} から正になるので a_{17} までは負です。つまり，S_{17} が最小となります

(3)　S_n の式を作って $S_n>0$ としましょう。

等差数列の和の公式

初項 a，公差 d，末項 l，項数 n の等差数列の和は　$S_n=\dfrac{1}{2}n(a+l)=\dfrac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$

4 等比数列の一般項(1)

初項が正である等比数列において，第8項が32，第10項が8である。この数列の初項と公比を求めよ。

解説

与えられた数列を $\{a_n\}$ とし，その初項を a，公比を r とする。

$a_8=32$ であるから　$ar^7=32$ ……①

$a_{10}=8$ であるから　$ar^9=8$ ……②

② から　$ar^7\cdot r^2=8$　① を代入して　$32r^2=8$

よって　$r^2=\dfrac{1}{4}$　したがって　$r=\pm\dfrac{1}{2}$

$r=\dfrac{1}{2}$ のとき，① から　$a\left(\dfrac{1}{2}\right)^7=32$　よって　$a=4096$

このとき，題意を満たす。

$r=-\dfrac{1}{2}$ のとき，① から　$a\left(-\dfrac{1}{2}\right)^7=32$　よって　$a=-4096$

このとき，題意を満たさず，不適。

以上から　初項は4096，公比は $\dfrac{1}{2}$

注意

等比数列の一般項

初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n=ar^{n-1}$

5 等比数列の一般項(2)

第3項が27，第6項が -729 である等比数列の初項と公比を求めよ。ただし，公比は実数とする。

解説

初項を a，公比を r とする。

第3項が27であるから　$ar^2=27$ ……①

第6項が -729 であるから　$ar^5=-729$ ……②

①，② から　$r^3=-27$　r は実数であるから　$r=-3$

$r=-3$ を ① に代入すると　$9a=27$　よって　$a=3$

したがって　初項は3，公比は -3

6 等差中項・等比中項

数列24，a，b が等差数列をなし，数列 a，b，8 が等比数列をなすという。このとき，a，b の値を求めよ。

解説

数列24，a，b が等差数列をなすから　$2a=24+b$ ……①

数列 a，b，8 が等比数列をなすから　$b^2=a\times8$

よって　$b^2=4\cdot2a$

① を代入すると　$b^2=4(24+b)$　整理すると　$b^2-4b-96=0$

ゆえに　$(b+8)(b-12)=0$　したがって　$b=-8,\ 12$

① から　$b=-8$ のとき　$a=8$，　$b=12$ のとき　$a=18$

すなわち　$(a,\ b)=(8,\ -8),\ (18,\ 12)$

注意

等差中項：数列 a,b,c がこの順に等差数列　⇒　$2b=a+c$

等比中項：数列 a,b,c がこの順に等比数列　⇒　$b^2=ac$

7 等比数列の和の公式(1)

初項が5，公比が2である等比数列において，第5項から第10項までの和を求めよ。

解説

初項から第 n 項までの和を S_n とすると　$S_n=\dfrac{5(2^n-1)}{2-1}=5(2^n-1)$

よって，求める和は

$S_{10}-S_4=5(2^{10}-1)-5(2^4-1)=5(2^{10}-2^4)=5040$

別解　一般項を a_n とすると　$a_n=5\cdot2^{n-1}$

よって，第5項から第10項までを順に並べると

$5\cdot2^4,\ 5\cdot2^5,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot2^9$

したがって，求める和は初項 $5\cdot2^4$，公比2，項数6の等比数列の和であるから

$\dfrac{5\cdot2^4(2^6-1)}{2-1}=5040$

注意

（第5項から第10項までの和）＝　$a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=S_{10}-S_4$

等比数列の和の公式

初項 a，公比 $r\,(r\fallingdotseq1)$，項数 n の等比数列の和は　$S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

8 等比数列の和の公式(2)

第 3 項が 6，初項から第 3 項までの和が 78 である等比数列の一般項を求めよ。

解説

初項を a，公比を r とすると，条件から

$ar^2=6$ ……①

$a+ar+ar^2=78$ ……②

②から　$a(1+r+r^2)=78$

両辺に r^2 をかけて　$ar^2(1+r+r^2)=78r^2$

①を代入して　$6(1+r+r^2)=78r^2$

よって　$12r^2-r-1=0$　ゆえに，$(3r-1)(4r+1)=0$ から　$r=\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{4}$

①から　$r=\dfrac{1}{3}$ のとき　$a=54$　$r=-\dfrac{1}{4}$ のとき　$a=96$

したがって，求める一般項は

$$54\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \text{ または } 96\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

別解

②÷①　で　$\dfrac{a(1+r+r^2)}{ar^2}=\dfrac{78}{6}$

$\dfrac{1+r+r^2}{r^2}=13$

$1+r+r^2=13r^2$

と考えてもよい。

9 Σの定義

次の和を記号 Σ を用いないで表せ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}2k$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}(3^k-1)$　　(3) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+1}\frac{1}{k}$

解説

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}2k=2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3+2\cdot4+2\cdot5=2+4+6+8+10$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}(3^k-1)=(3^1-1)+(3^2-1)+(3^3-1)+(3^4-1)=2+8+26+80$

(3) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+1}\frac{1}{k}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots+\frac{1}{n+1}$

注意

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+\ \cdots\cdots\ +a_n$　は「a_kでkを1からnまで変えてたす」という意味。

$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}2k$　だとkを1から5まで変えて足せばいい。

本問題では「和をΣを用いないで表せ」とあるから、計算しなくてもいい。

10 Σの計算(1)

次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{15}k^2$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+3)$　　(3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(20-3i)$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(6k^2+1)$　　(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-5)$

(6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}4\cdot2^{k-1}$　　(7) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-3)^k$

解説

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{15}k^2=\frac{1}{6}\cdot15(15+1)(2\cdot15+1)=1240$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+3)=2\sum_{k=1}^{n}k+3\sum_{k=1}^{n}1=2\times\frac{1}{2}n(n+1)+3\times n$

$=n^2+4n=n(n+4)$

(3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(20-3i)=20\sum_{i=1}^{n}1-3\sum_{i=1}^{n}i=20\times n-3\times\frac{1}{2}n(n+1)$

$=\dfrac{1}{2}n\{40-3(n+1)\}=-\dfrac{1}{2}n(3n-37)$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(6k^2+1)=6\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}1=6\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+n$

$=n\{(n+1)(2n+1)+1\}=n(2n^2+3n+2)$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-5)=\sum_{k=1}^{n}(k^2-6k+5)=\sum_{k=1}^{n}k^2-6\sum_{k=1}^{n}k+5\sum_{k=1}^{n}1$

$=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-6\times\dfrac{1}{2}n(n+1)+5\times n$

$=\dfrac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)-18(n+1)+30\}$

$=\dfrac{1}{6}n(2n^2-15n+13)=\dfrac{1}{6}n(n-1)(2n-13)$

(6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}4\cdot2^{k-1}=4\cdot1+4\cdot2^1+4\cdot2^2+\cdots\cdots+4\cdot2^{n-1}$

これは初項 4，公比 2，項数 n の等比数列の和であるから

$$\sum_{k=1}^{n}4\cdot2^{k-1}=\frac{4(2^n-1)}{2-1}=4(2^n-1)=2^{n+2}-4$$

(7) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-3)^k=(-3)+(-3)^2+(-3)^3+\cdots\cdots+(-3)^n$

これは初項 -3，公比 -3，項数 n の等比数列の和であるから

$$\sum_{k=1}^{n}(-3)^k=\frac{-3\{1-(-3)^n\}}{1-(-3)}=\frac{3}{4}\{(-3)^n-1\}$$

注意

$\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c=nc}$　$\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)}$　$\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}$　$\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2}$

$\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ar^{k-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}\quad(r\neq1)}$

（$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ar^{k-1}$ は初項 a，公比 r，項数 n の等比数列の和。）

11 Σの計算(2)

数列 $2\cdot12,\ 4\cdot9,\ 6\cdot6,\ 8\cdot3,$ ……の初項から第 n 項までの和を求めよ。

解説

第 k 項は　$2k\cdot\{12+(k-1)\cdot(-3)\}=-6k^2+30k$

よって，求める和は

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-6k^2+30k)=-6\sum_{k=1}^{n}k^2+30\sum_{k=1}^{n}k$

$=-6\times\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+30\times\dfrac{1}{2}n(n+1)$

$=n(n+1)\{-(2n+1)+15\}=-2n(n+1)(n-7)$

注意

左側　2，4，6，8，……　偶数の数列なので$2k$

右側　12，9，6，3，……　初項12，公差-3の等差数列なので，$12+(k-1)\cdot(-3)$

12 Σの計算(3)

次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1) $1^2,\ 3^2,\ 5^2,$ ……　　(2) $1,\ 1+2,\ 1+2+2^2,$ ……

解説

与えられた数列の第 k 項を a_k とし，求める和を S_n とする。

(1) $a_k=(2k-1)^2$

よって　$\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)=4\sum_{k=1}^{n}k^2-4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$

$=4\cdot\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1)+n$

$=\dfrac{1}{3}n\{2(n+1)(2n+1)-6(n+1)+3\}=\dfrac{1}{3}n(4n^2-1)=\dfrac{1}{3}n(2n+1)(2n-1)$

(2) $a_k=1+2+2^2+\ \cdots\cdots\ +2^{k-1}=\dfrac{1\cdot(2^k-1)}{2-1}=2^k-1$

よって　$\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)=\sum_{k=1}^{n}2^k-\sum_{k=1}^{n}1=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-n=2^{n+1}-n-2$

注意

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$の$a_k$に代入したいので，第$k$項 a_kを求める。（a_kとは一般項a_nで$n=k$としたもの）

(1)の第n項は，$(2n-1)^2$なので，$a_k=(2k-1)^2$

(2)は一般項が和の形になっているタイプ。

第n項は，初項1，公比2の等比数列の和なので，$a_k=1+2+2^2+\ \cdots\cdots\ +2^{k-1}$

まずは等比数列の和の公式で一般項を求め，再びΣの中に入れて和を計算する。

13 Σの計算(4)

次の数列の第 k 項を求めよ。また，初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1)　2，$2+5$，$2+5+8$，$2+5+8+11$，……

(2)　$1\cdot(2n-1)$，$3(2n-3)$，$5(2n-5)$，……，$(2n-3)\cdot 3$，$(2n-1)\cdot 1$

解説

第 k 項を a_k，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

(1)　$a_k=2+5+8+\cdots\cdots+(3k-1)$

これは，初項 2，公差 3 の等差数列の初項から第 k 項までの和であるから

$$a_k=\frac{1}{2}k\{2\cdot 2+(k-1)\cdot 3\}=\frac{1}{2}k(3k+1)$$

また

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{2}(3k^2+k)\right\}=\frac{1}{2}\left\{3\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\{(2n+1)+1\}$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)^2$$

(2)　$a_k=(2k-1)\{2n-(2k-1)\}=(2k-1)(2n-2k+1)$　$[1\leqq k\leqq n]$

また

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\{-4k^2+4(n+1)k-(2n+1)\}$$

$$=-4\sum_{k=1}^{n}k^2+4(n+1)\sum_{k=1}^{n}k-(2n+1)\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=-4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+4(n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-(2n+1)n$$

$$=\frac{1}{3}n\{-2(2n^2+3n+1)+6(n^2+2n+1)-3(2n+1)\}$$

$$=\frac{1}{3}n(2n^2+1)$$

注意

(1)は一般項が和の形になっているタイプ。

(2)は左側は，1, 3, 5, ……，$2n-1$ という奇数の数列。

右側は，$2n-1$，$2n-3$，$2n-5$，……，$2n-(2k-1)$ というように，$2n$ から奇数を引く形。

よって一般項 $a_k=(2k-1)\{2n-(2k-1)\}$。これをΣの中に入れる。

14 Σの計算(5)

次の数列の和を求めよ。

$$\frac{1}{1\cdot 3},\ \frac{1}{3\cdot 5},\ \frac{1}{5\cdot 7},\ \cdots\cdots,\ \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

解説

この数列の第 k 項は　$\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(2k+1)-(2k-1)}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right)$

求める和を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$$

注意

部分分数に分けるとうまくいくタイプ。

$\dfrac{1}{(x+a)(x+b)}=\dfrac{1}{|a-b|}\left(\dfrac{1}{x+a}-\dfrac{1}{x+b}\right)$　$(a<b)$　と考えるとよい。

本問題では $2n-1$ と $2n+1$ の差は2なので $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$ となる。

部分分数の分解は $\boxed{\dfrac{1}{|差|}\left(\dfrac{1}{小}-\dfrac{1}{大}\right)}$ と覚えよう。

15 Σの計算(6)

和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+3}}$ を求めよ。

解説

$$\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+3}}=\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+3}}{(\sqrt{k+2}+\sqrt{k+3})(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+3})}$$

$$=\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+3}}{(k+2)-(k+3)}=-(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+3})$$

よって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+3}}=\sum_{k=1}^{n}\{-(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+3})\}$

$$=-\{(\sqrt{3}-\sqrt{4})+(\sqrt{4}-\sqrt{5})+(\sqrt{5}-\sqrt{6})+\cdots\cdots+(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+3})\}$$

$$=\sqrt{n+3}-\sqrt{3}$$

注意

分母の $\sqrt{\ }$ を有理化するとうまくいく。

普通に有理化すると，$\sqrt{k+3}-\sqrt{k+2}$ となるが，

解説のように $-(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+3})$ と変形した方が楽に計算できる。

$\boxed{\sqrt{小}-\sqrt{大}\text{ の形にする}}$ と覚えておこう。

16 （等差）×（等比）の和

和 $S_n=1+4\cdot 2+7\cdot 2^2+10\cdot 2^3+\cdots\cdots+(3n-2)\cdot 2^{n-1}$ を求めよ。

解説

$$S_n=1+4\cdot 2+7\cdot 2^2+\cdots\cdots+(3n-2)\cdot 2^{n-1}$$

$$2S_n=\qquad 2+4\cdot 2^2+\cdots\cdots+(3n-5)\cdot 2^{n-1}+(3n-2)\cdot 2^n$$

の辺々を引くと

$$S_n-2S_n=1+3\cdot 2+3\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots\cdots+3\cdot 2^{n-1}-(3n-2)\cdot 2^n$$

よって　$-S_n=1+3(2+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^{n-1})-(3n-2)\cdot 2^n$

←左辺に−をつけ忘れないように

$$=1+3\cdot\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}-(3n-2)\cdot 2^n=(5-3n)\cdot 2^n-5$$

したがって　$S_n=(3n-5)\cdot 2^n+5$

注意

$\boxed{\text{（等差）×（等比）の和を求める問題は}S_n-rS_n}$ を計算する。（r は等比数列の公比）

左側が，1，4，7，……は等差数列。

右側は，1，2，2^2，…… は，初項1，公比2の等比数列。

等比数列の公比が2なので，S_n-2S_n を計算する。

途中の $2+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^{n-1}$ は初項2，公比2，項数 $n-1$ の等比数列の和。

17 階差数列

数列 1，2，5，14，41，…… の一般項 a_n を求めよ。

解説

この数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は　1，3，9，27，……

よって，数列 $\{b_n\}$ は初項 1，公比 3 の等比数列であるから　$b_n=1\cdot 3^{n-1}$

ゆえに，$n\geqq 2$ のとき　$a_n=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}1\cdot 3^{k-1}=1+\frac{1\cdot(3^{n-1}-1)}{3-1}=\frac{1}{2}(3^{n-1}+1)$

初項は $a_1=1$ であるから，この式は $n=1$ のときにも成り立つ。

したがって　$a_n=\dfrac{1}{2}(3^{n-1}+1)$

注意

$\boxed{\text{数列}\{a_n\}\text{の階差数列を}\{b_n\}\text{とすると，}n\geqq 2\text{ のとき}\quad a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k}$

階差数列の公式は，$n\geqq 2$ のときに使うことができる。

最後に $n=1$ のときも成り立つか確認。

成り立たないときは $n=1$ と $n\geqq 2$ を分けて答える。

18 和 S_n から一般項 a_n を求める

初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=2n^2-n$ となる数列 $\{a_n\}$ について

(1)　一般項 a_n を求めよ。

(2)　和 $a_1+a_3+a_5+\cdots\cdots+a_{2n-1}$ を求めよ。

解説

(1)　$n\geqq 2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=(2n^2-n)-\{2(n-1)^2-(n-1)\}=4n-3$　……①

また　$a_1=S_1=2\cdot 1^2-1=1$

ここで，① において $n=1$ とすると　$a_1=4\cdot 1-3=1$

よって，$n=1$ のときにも ① は成り立つ。

したがって　$a_n=4n-3$

(2)　(1) により　$a_{2k-1}=4(2k-1)-3=8k-7$

よって　$a_1+a_3+a_5+\cdots\cdots+a_{2n-1}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}=\sum_{k=1}^{n}(8k-7)$

$$=8\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-7n=n(4n-3)$$

注意

$n\geqq 2$ のとき，和 S_n と一般項 a_n の関係　$\boxed{a_1=S_1\quad a_n=S_n-S_{n-1}}$

(2)は，$a_1+a_3+a_5+\cdots\cdots+a_{2n-1}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}$ なので，(1)の答えから a_{2k-1} をつくってΣの中に代入する。

19 **群数列**

奇数の数列を 1 | 3，5 | 7，9，11 | 13，15，17，19 | 21，…… のように，第 n 群が n 個の数を含むように分けるとき

(1)　第 n 群の最初の奇数を求めよ。　　(2)　第 n 群の総和を求めよ。

(3)　301 は第何群の何番目に並ぶ数か。

(解説)

(1)　$n \geqq 2$ のとき，第 1 群から第 $(n-1)$ 群までにある奇数の個数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)=\frac{1}{2}(n-1)n$$

よって，第 n 群の最初の奇数は $\frac{1}{2}(n-1)n+1$ 番目の奇数で

$$2\left\{\frac{1}{2}(n-1)n+1\right\}-1=n^2-n+1$$

←第n群の最初の数は第$(n-1)$群の最後の数の次の数

これは $n=1$ のときも成り立つ。

(2)　(1) より，第 n 群は初項 n^2-n+1，公差 2，項数 n の等差数列をなす。

よって，その総和は

$$\frac{1}{2}n\{2\cdot(n^2-n+1)+(n-1)\cdot 2\}=n^3$$

(3)　301 が第 n 群に含まれるとすると　←(n群の最初の数)≦301＜($n+1$群の最初の数)

$$n^2-n+1 \leqq 301 < (n+1)^2-(n+1)+1$$

よって　$n(n-1) \leqq 300 < (n+1)n$ ……①

$17\cdot 16=272$，$18\cdot 17=306$ であるから，　←展開せずに代入して予測する

① を満たす自然数 n は　$n=17$

301 が第 17 群の m 番目であるとすると

$\underline{(17^2-17+1)+(m-1)\cdot 2=301}$　　これを解いて　$m=15$

←　等差数列の一般項の公式　$a_n=a+(n-1)d$

したがって，301 は第 17 群の 15 番目に並ぶ数である。

別解　(前半)　$2k-1=301$ から　$k=151$

よって，301 はもとの数列において，151 番目の奇数である。

301 が第 n 群に含まれるとすると

$$\frac{1}{2}n(n-1)<151 \leqq \frac{1}{2}n(n+1)$$

ゆえに　$n(n-1)<302 \leqq n(n+1)$

これを満たす自然数 n は，上の解答と同様にして　$n=17$

注意

群数列のポイント

①「第n群に何個の項があるのか」　…本問題ではn群にn個の数がある。

②「第n群の最初の数は，第$n-1$群の最後の数の次の数」

　　$n-1$群　　　　　n群

|　　　　　○|●　　　　　|

③設問のタイプを見抜け。

(1)第n群の○番目を求めよ　⇒　具体的な数を求める。　　本問題では(1)

(2)具体的な数が与えられる　⇒　第何群の何番目かを答える。　本問題では(3)

(1)のパターンでは，求める項が第何項かを考える。

(2)のパターンでは，与えられた数が第n群に含まれると考える。