1 因数分解を利用した指数計算

(1)　$a>0$，$a^x=2$ のとき，$(a^{3x}+a^{-3x})\div(a^x+a^{-x})$ の値を求めよ。

(2)　$2^x-2^{-x}=1$ のとき，4^x+4^{-x}，8^x-8^{-x} の値を求めよ。

解説

(1)
$$
\begin{aligned}
(a^{3x}+a^{-3x})\div(a^x+a^{-x})&=\frac{(a^x)^3+(a^{-x})^3}{a^x+a^{-x}}\\
&=\frac{(a^x+a^{-x})(a^{2x}-a^x\cdot a^{-x}+a^{-2x})}{a^x+a^{-x}}\\
&=(a^x)^2-1+(a^x)^{-2}=2^2-1+\frac{1}{2^2}=\frac{13}{4}
\end{aligned}
$$

(2)
$$
\begin{aligned}
4^x+4^{-x}&=(2^2)^x+(2^2)^{-x}=(2^x)^2+(2^{-x})^2=(2^x-2^{-x})^2+2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}\\
&=(2^x-2^{-x})^2+2=1^2+2=3\\
8^x-8^{-x}&=(2^3)^x-(2^3)^{-x}=(2^x)^3-(2^{-x})^3=(2^x-2^{-x})(2^{2x}+2^x\cdot 2^{-x}+2^{-2x})\\
&=(2^x-2^{-x})(2^{2x}+2^{-2x}+1)=1\cdot(3+1)=4
\end{aligned}
$$

2 指数関数のグラフ(1)

次の関数のグラフをかけ。また，$y=2^x$ のグラフとの位置関係をいえ。

(1)　$y=-2^x$　　(2)　$y=2^{-x}$　　(3)　$y=-\left(\frac{1}{2}\right)^x$　　(4)　$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$

解説

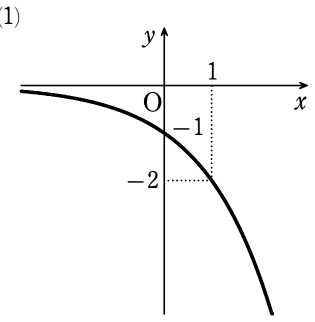
(1)　グラフは［図］

このグラフは，$y=2^x$ のグラフと x 軸について対称である。

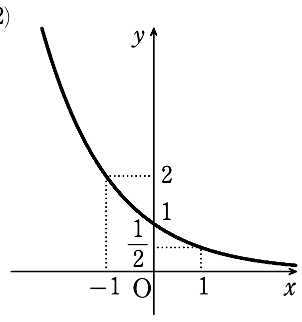
(2)　グラフは［図］

このグラフは，$y=2^x$ のグラフと y 軸について対称である。

(1)



(2)



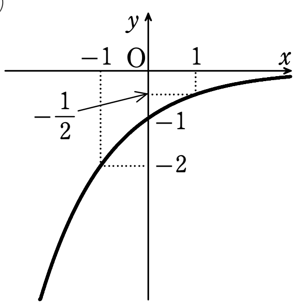
(3)　グラフは［図］

このグラフは，$y=2^x$ のグラフと原点について対称である。

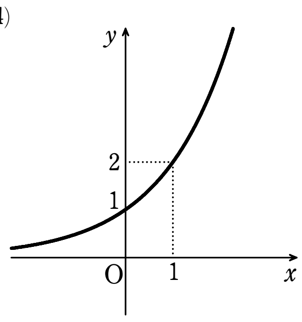
(4)　グラフは［図］

このグラフは，$y=2^x$ のグラフと一致する。

(3)



(4)



3 指数関数のグラフ(2)

次の関数のグラフをかけ。

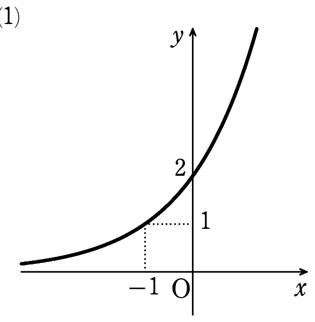
(1)　$y=2^{x+1}$　　(2)　$y=2^x+1$　　(3)　$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$　　(4)　$y=6\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$

解説

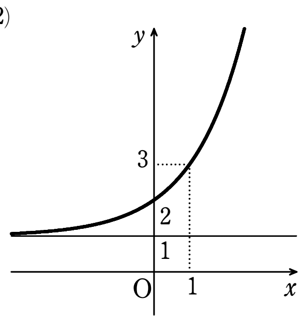
(1)　$y=2^x$ のグラフを x 軸方向に -1 だけ平行移動したもので，［図］のようになる。

(2)　$y=2^x$ のグラフを y 軸方向に 1 だけ平行移動したもので，［図］のようになる。

(1)



(2)

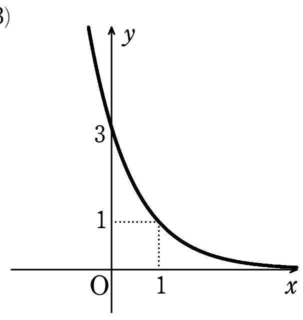


(3)　$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ のグラフを x 軸方向に 1 だけ平行移動したもので，［図］のようになる。

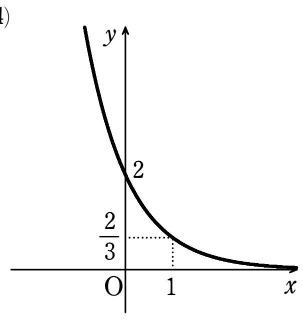
(4)　$y=6\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}=6\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^x=2\left(\frac{1}{3}\right)^x$

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ のグラフを y 軸方向に 2 倍に拡大したもので，［図］のようになる。

(3)



(4)



4 累乗根・累乗の大小(1)

次の数の大小関係を調べよ。

(1)　9^4，9^{-2}，1，9^3　　(2)　0.9^3，0.9^{-3}，0.9^2　　(3)　$\sqrt[5]{8}$，$\sqrt[6]{16}$，$\sqrt[8]{64}$

解説

(1)　$1=9^0$

関数 $y=9^x$ は，底 9 が 1 より大きいから，x の値が増加すると y の値も増加する。

よって　　$9^{-2}<9^0<9^3<9^4$

すなわち　　$9^{-2}<1<9^3<9^4$

(2)　関数 $y=0.9^x$ は，底 0.9 が 1 より小さいから，x の値が増加すると y の値は減少する。

よって　　$0.9^3<0.9^2<0.9^{-3}$

(3)　$\sqrt[5]{8}=2^{\frac{3}{5}}$，$\sqrt[6]{16}=2^{\frac{4}{6}}=2^{\frac{2}{3}}$，$\sqrt[8]{64}=2^{\frac{6}{8}}=2^{\frac{3}{4}}$

関数 $y=2^x$ は，底 2 が 1 より大きいから，x の値が増加すると y の値も増加する。

よって　　$2^{\frac{3}{5}}<2^{\frac{2}{3}}<2^{\frac{3}{4}}$

すなわち　　$\sqrt[5]{8}<\sqrt[6]{16}<\sqrt[8]{64}$

5 累乗根・累乗の大小(2)

次の数の大小関係を調べよ。

(1)　$\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$，$\sqrt[6]{6}$　　(2)　2^{30}，3^{20}，7^{10}

解説

(1)　3 つの数を，それぞれ 6 乗すると

$$(\sqrt{2})^6=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6=2^3=8,\ (\sqrt[3]{3})^6=\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6=3^2=9,\ (\sqrt[6]{6})^6=6$$

$6<8<9$ であるから　　$(\sqrt[6]{6})^6<(\sqrt{2})^6<(\sqrt[3]{3})^6$

$\sqrt[6]{6}>0$，$\sqrt{2}>0$，$\sqrt[3]{3}>0$ であるから　　$\sqrt[6]{6}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$

(2)　$2^{30}=(2^3)^{10}=8^{10}$，$3^{20}=(3^2)^{10}=9^{10}$

$7<8<9$ であるから　　$7^{10}<8^{10}<9^{10}$

すなわち　　$7^{10}<2^{30}<3^{20}$

6 指数方程式・指数不等式

次の方程式と不等式を解け。

(1)　$2^x-24\cdot 2^{-x}=5$　　(2)　$\left(\frac{1}{9}\right)^{x+1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x+3}>\frac{2}{81}$

解説

(1)　方程式の両辺に 2^x (>0) をかけて　　$(2^x)^2-24=5\cdot 2^x$

ゆえに　　$(2^x)^2-5\cdot 2^x-24=0$

$2^x=t$ とおくと　　$t^2-5t-24=0$

よって　　$(t+3)(t-8)=0$

$t>0$ であるから　　$t=8$　すなわち　$2^x=8$

したがって　　$x=3$

(2)　不等式を変形すると　　$\frac{1}{9}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2+\frac{1}{27}\left(\frac{1}{3}\right)^x-\frac{2}{81}>0$

両辺に 81 をかけて　　$9\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2+3\left(\frac{1}{3}\right)^x-2>0$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x=t$ とおくと　　$9t^2+3t-2>0$

ゆえに　　$(3t-1)(3t+2)>0$　……①

$t>0$ であるから　　$3t+2>0$

したがって，① から　　$3t-1>0$

よって　　$t>\frac{1}{3}$　すなわち　$\left(\frac{1}{3}\right)^x>\frac{1}{3}$

底 $\frac{1}{3}$ は 1 より小さいから　　$x<1$

$\boxed{7}$ **指数関数の最大・最小(1)**

関数 $y=4^x-2^{x+3}+13$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$t=2^x$ とおいて，y を t の式で表せ。

(2)　y の最小値とそのときの x の値を求めよ。

解説

(1)　$4^x-2^{x+3}+13=(2^x)^2-8\cdot2^x+13$ であるから　　$y=t^2-8t+13$

(2)　$y=t^2-8t+13=(t^2-8t+4^2)-4^2+13=(t-4)^2-3$

$2^x=t$ より，$t>0$ であるから，この範囲で y は

$t=4$ すなわち $x=2$ のとき最小値 -3 をとる。

$\boxed{8}$ **指数関数の最大・最小(2)**

関数$y=4^x+4^{-x}-5(2^x+2^{-x})+6$の最小値を求めよ。

解説

掛け算をして文字が約分される　⇒　相加相乗平均の関係を疑え

置き換えたら範囲に注意！

2^x+2^{-x}をtと置き換える問題だが，2^xと2^{-x}を掛け算すると約分で1になることに注目して相加相乗平均の関係を利用して最小値を出しておく必要がある。

tに置き換えた後は2次関数の最小値の問題になる。

※相加・相乗平均の関係

$a>0, b>0$ のとき $a+b\geqq2\sqrt{ab}$　（等号成立は$a=b$のとき）

$2^x+2^{-x}=t$とおく。

$2^x>0,\ 2^{-x}>0$であるから，相加平均・相乗平均の関係より

$t=2^x+2^{-x}\geqq2\sqrt{2^x\cdot2^{-x}}=2\sqrt{2^x\cdot\dfrac{1}{2^x}}=2$

よって$t\geqq2$　…①

ただし，等号$(t=2)$が成り立つのは$2^x=2^{-x}$のときで，$x=-x,\ 2x=0,\ x=0$　のとき。

また，$4^x+4^{-x}=(2^2)^x+(2^2)^{-x}$

$=(2^x)^2+(2^{-x})^2$

$=(2^x+2^{-x})^2-2\cdot2^x\cdot2^{-x}$

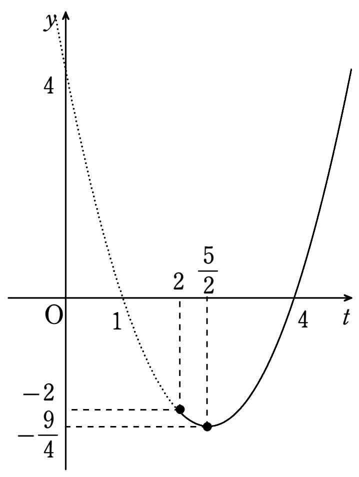
$=t^2-2$

よって$y=4^x+4^{-x}-5(2^x+2^{-x})+6$

$=t^2-2-5t+6$

$=t^2-5t+4$

$=\left(t-\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}$　（ただし①より $t\geqq2$）



グラフより，yは$t=\dfrac{5}{2}$のとき最小となる。

このとき，$2^x+2^{-x}=\dfrac{5}{2}$

$2^x+\dfrac{1}{2^x}=\dfrac{5}{2}$　　$\Leftarrow$　両辺に$2\cdot2^x$を掛ける

$2\cdot2^x\cdot2^x+2=5\cdot2^x$

$2\cdot(2^x)^2-5\cdot2^x+2=0$　　$\Leftarrow$　$2X^2-5X+2=0$

$(2\cdot2^x-1)(2^x-2)=0$　　$(2X-1)(X-2)=0$

$2^x=\dfrac{1}{2}, 2$

$2^x=2^{-1}$ より $x=-1,\ 2^x=2$ より $x=1$

よって，$x=\pm1$のとき最小値$-\dfrac{9}{4}$