1 不定積分

次の不定積分を求めよ。

(1) $\int(4x^3-3x^2-1)dx$　　(2) $\int(x-1)^3dx$　　(3) $\int(x-1)^2(x+2)dx$

解説

C は積分定数とする。

(1) (与式)$=4\cdot\frac{x^4}{4}-3\cdot\frac{x^3}{3}-x+C=x^4-x^3-x+C$

(2) (与式)$=\int(x^3-3x^2+3x-1)dx=\frac{x^4}{4}-x^3+\frac{3}{2}x^2-x+C$

(3) (与式)$=\int(x^3-3x+2)dx=\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2+2x+C$

＜公式＞

$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$　　C は積分定数

2 接線の傾きからの関数決定

点 $(-2,\ 3)$ を通る曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(x,\ y)$ における接線の傾きが $6x^2+2x+3$ であるとき，$f(x)$ を求めよ。

解説

条件から　　$f'(x)=6x^2+2x+3$

ゆえに　　$f(x)=\int(6x^2+2x+3)dx=2x^3+x^2+3x+C$　(C は積分定数)

この曲線は点 $(-2,\ 3)$ を通るから

$f(-2)=3$　すなわち　$2\cdot(-2)^3+(-2)^2+3\cdot(-2)+C=3$

よって　　$C=21$

したがって　$f(x)=2x^3+x^2+3x+21$

＜公式＞

$F'(x)=f(x)$ のとき　$\int f(x)dx=F(x)+C$　　C は定数

3 定積分

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{-1}^{2}(x^2-x)dx-\int_{3}^{2}(x^2-x)dx$　　(2) $\int_0^1(2x+1)^2dx-\int_0^1(2x-1)^2dx$

解説

(1) $\int_{-1}^{2}(x^2-x)dx-\int_{3}^{2}(x^2-x)dx=\int_{-1}^{2}(x^2-x)dx+\int_{2}^{3}(x^2-x)dx$

$=\int_{-1}^{3}(x^2-x)dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{3}$

$=\left(9-\frac{9}{2}\right)-\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{16}{3}$

(2) $\int_0^1(2x+1)^2dx-\int_0^1(2x-1)^2dx=\int_0^1\{(2x+1)^2-(2x-1)^2\}dx$

$=\int_0^1 8x\,dx=\left[4x^2\right]_0^1=4$

＜公式＞

関数 $f(x)$ の不定積分の１つを $F(x)$ とすると　$\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$

4 定数になる定積分を含む関数

等式 $f(x)=x+\frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

解説

$k=\int_0^1 f(t)\,dt$ とおくと　　$f(x)=x+\frac{1}{2}k$　　よって $f(t)=t+\frac{1}{2}k$

ゆえに　　$k=\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1\left(t+\frac{1}{2}k\right)dt=\left[\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}at\right]_0^1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}k$

よって　　$k=1$　　したがって　　$f(x)=x+\frac{1}{2}$

注意

a，bが定数のとき，$\int_a^b f(t)dt=k$とおけ

積分範囲が定数である定積分$\int_a^b f(t)dt$の計算結果は定数になる。

したがって$\int_0^1 f(t)dt$は定数になるのでkとおくことができる。

5 定積分と微分法

次の等式が任意の x に対して成り立つとき，関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

(1) $\int_a^x f(t)\,dt=x^2-3x-4$　　(2) $\int_1^x f(t)\,dt=2x^2-3x+a$

解説

(1) 等式の両辺を x で微分すると　　$f(x)=2x-3$

また，与えられた等式で $x=a$ とおくと，左辺は 0 になるから

$0=a^2-3a-4$

ゆえに　$(a+1)(a-4)=0$

よって　$a=-1,\ 4$

(2) 等式の両辺を x で微分すると　　$f(x)=4x-3$

また，与えられた等式で $x=1$ とおくと，左辺は 0 になるから

$0=2-3+a$

よって　$a=1$

＜公式＞

$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$　　ただし a は定数　　←aは定数であればなんでもいい

注意

4との違いに注意。

本問題の積分範囲は$\int_a^x f(t)dt$というように$\int_{定数}^{変数}$ となっている。

したがって4のように定数kとおくことはできない。

積分範囲が定数から変数のときは，微分すると$f(x)$になると覚えておこう。

6 放物線とx軸の間の面積

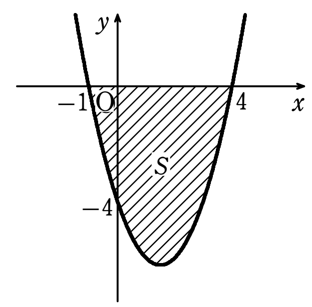
次の曲線，直線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=x^2-3x-4$　　(2) $y=-x^2+2x$ $(x\leqq 1)$，$x=-1$，$x=1$

解説

(1) 曲線と x 軸の交点の x 座標は，$x^2-3x-4=0$ を解くと，$(x+1)(x-4)=0$ から　　$x=-1,\ 4$

$-1\leqq x\leqq 4$ では $y\leqq 0$ であるから，求める面積は



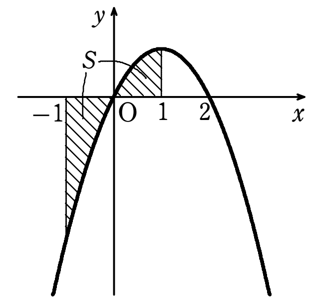
$S=-\int_{-1}^{4}(x^2-3x-4)dx$

$=-\int_{-1}^{4}(x+1)(x-4)dx$

$=-\left(-\frac{1}{6}\right)\{4-(-1)\}^3=\frac{125}{6}$

(2) 曲線と x 軸の交点の x 座標は，$-x^2+2x=0$ を解くと，$-x(x-2)=0$ から　　$x=0,\ 2$

右の図から，求める面積は



$S=-\int_{-1}^{0}(-x^2+2x)dx+\int_0^1(-x^2+2x)dx$

$=-\left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^1$

$=-\left\{-\left(\frac{1}{3}+1\right)\right\}+\left(-\frac{1}{3}+1\right)=2$

＜公式＞

区間 $a\leqq x\leqq b$ で常に $f(x)\geqq 0$ のとき　　$S=\int_a^b f(x)dx$

区間 $a\leqq x\leqq b$ で常に $f(x)\leqq 0$ のとき　　$S=-\int_a^b f(x)dx$　　←$S=\int_a^b\{0-f(x)\}dx$

区間 $a\leqq x\leqq b$ で常に $f(x)\geqq g(x)$ のとき　　$S=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$

7 2曲線間の面積

次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=x^2-x-1$，$y=x+2$　　(2) $y=x^2-2x$，$y=-x^2+x+2$

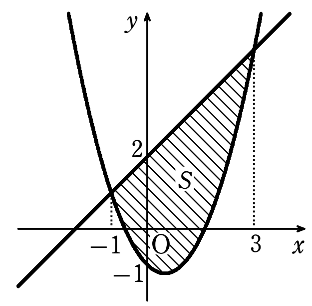
解説

(1) 曲線と直線の交点の x 座標は，$x^2-x-1=x+2$

すなわち $x^2-2x-3=0$ を解くと

$(x+1)(x-3)=0$ から　　$x=-1,\ 3$

よって，右の図から，求める面積は



$S=\int_{-1}^{3}\{(x+2)-(x^2-x-1)\}dx$

$=\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)dx=-\int_{-1}^{3}(x+1)(x-3)dx$

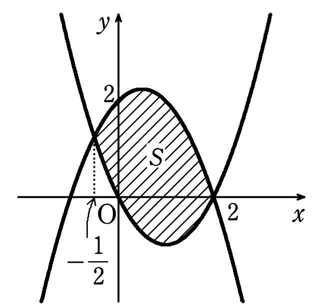
$=-\left(-\frac{1}{6}\right)\{3-(-1)\}^3=\frac{32}{3}$

(2) 2 曲線の交点の x 座標は，$x^2-2x=-x^2+x+2$

すなわち $2x^2-3x-2=0$ を解くと

$(2x+1)(x-2)=0$ から　　$x=-\frac{1}{2},\ 2$

よって，右の図から，求める面積は



$S=\int_{-\frac{1}{2}}^{2}\{(-x^2+x+2)-(x^2-2x)\}dx$

$=\int_{-\frac{1}{2}}^{2}(-2x^2+3x+2)dx$

$=-2\int_{-\frac{1}{2}}^{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)dx=-2\left(-\frac{1}{6}\right)\left\{2-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}^3=\frac{125}{24}$

注意

2曲線で囲まれた図形の面積は，グラフを書いて上下関係を調べて，$f(x)=g(x)$を解いて2曲線の交点を求める。

区間 $a\leqq x\leqq b$ で常に $f(x)\geqq g(x)$ のとき　$S=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$

を用いても計算できるが，以下の公式を利用すると楽に計算ができる。

$\boxed{\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3}$より

$\boxed{\int_\alpha^\beta(ax^2+bx+c)dx=a\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3}$

8 不等式の表す領域の面積

(1)　連立不等式 $y\geqq x^2$，$y\geqq 2-x$，$y\leqq x+6$ の表す領域を図示せよ。

(2)　(1) の領域の面積 S を求めよ。

解説

(1)　境界線の交点の座標は，次の 3 つの連立方程式の解である。

①$\begin{cases}y=x^2\\y=2-x\end{cases}$　②$\begin{cases}y=x^2\\y=x+6\end{cases}$　③$\begin{cases}y=2-x\\y=x+6\end{cases}$

連立方程式 ① を解くと

$(x,\ y)=(-2,\ 4),\ (1,\ 1)$

連立方程式 ② を解くと

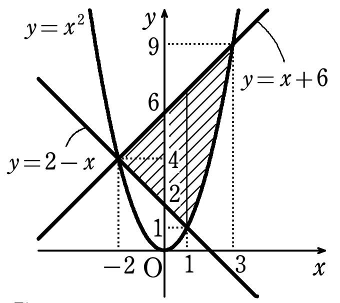
$(x,\ y)=(-2,\ 4),\ (3,\ 9)$

連立方程式 ③ を解くと

$(x,\ y)=(-2,\ 4)$

したがって，求める領域は，図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。



(2)　直線 $x=1$ と直線 $y=x+6$ の交点の座標は　$(1,\ 7)$

よって，(1) の図から，求める面積は

$$S=\frac{1}{2}\times\{1-(-2)\}\times(7-1)+\int_1^3\{(x+6)-x^2\}dx$$

$$=9+\int_1^3(-x^2+x+6)dx=9+\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+6x\right]_1^3$$

$$=9+\frac{22}{3}=\frac{49}{3}$$

別解

(2)　$S=\int_{-2}^3\{(x+6)-x^2\}dx-\int_{-2}^1\{(2-x)-x^2\}dx$　を計算してもよい。

9 放物線と2接線の間の面積

放物線 $y=x^2-4x+3$ を C とする。C 上の点 $(0,\ 3)$，$(6,\ 15)$ における接線をそれぞれ，ℓ_1，ℓ_2 とするとき，次のものを求めよ。

(1)　ℓ_1，ℓ_2 の方程式　　　(2)　C，ℓ_1，ℓ_2 で囲まれる図形の面積

解説

(1)　$y=x^2-4x+3$ から　　$y'=2x-4$

ℓ_1 の方程式は　　$y-3=(2\cdot0-4)(x-0)$

すなわち　　$y=-4x+3$

ℓ_2 の方程式は　　$y-15=(2\cdot6-4)(x-6)$

すなわち　　$y=8x-33$

(2)　ℓ_1，ℓ_2 の交点の x 座標は，$-4x+3=8x-33$ を解くと　　$12x-36=0$

ゆえに　　$x=3$

よって，求める面積 S は

$$S=\int_0^3\{(x^2-4x+3)-(-4x+3)\}dx$$

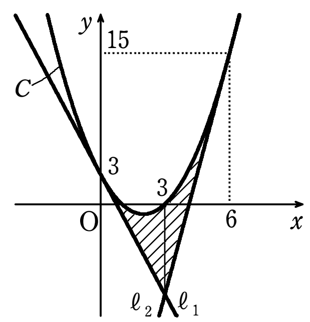
$$+\int_3^6\{(x^2-4x+3)-(8x-33)\}dx$$

$$=\int_0^3x^2dx+\int_3^6(x-6)^2dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3+\left[\frac{(x-6)^3}{3}\right]_3^6$$

$$=9+9=18$$

←公式を利用すると計算が楽



＜公式＞

$\boxed{\int(x+a)^ndx=\frac{1}{n+1}(x+a)^{n+1}+C}$

$\boxed{\int(ax+b)^ndx=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{a}(ax+b)^{n+1}+C}$

10 面積の等分

a を定数とする。放物線 $y=-x(x-2)$ と x 軸で囲まれた部分の面積が，直線 $y=ax$ によって 2 等分されるときの a の値を求めよ。

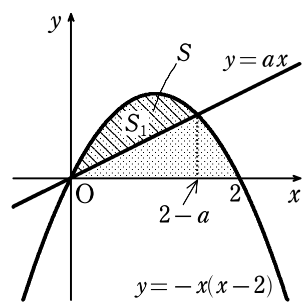
解説

放物線 $y=-x(x-2)$ と直線 $y=ax$ の交点の x 座標は，方程式 $-x(x-2)=ax$ の解である。

ゆえに　　$x\{x-(2-a)\}=0$

よって　　$x=0,\ 2-a$

放物線と直線 $y=ax$，放物線と x 軸で囲まれた部分の面積を，それぞれ S_1，S とすると



$$S_1=\int_0^{2-a}\{-x(x-2)-ax\}dx$$

$$=-\int_0^{2-a}x\{x-(2-a)\}dx$$

$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)(2-a)^3=\frac{1}{6}(2-a)^3$$

$$S=\int_0^2\{-x(x-2)\}dx=-\int_0^2x(x-2)dx$$

$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)(2-0)^3=\frac{4}{3}$$

求める条件は　　$2S_1=S$

ゆえに　　$\frac{1}{3}(2-a)^3=\frac{4}{3}$　すなわち　$(2-a)^3=4$

よって　　$2-a=\sqrt[3]{4}$　　すなわち　$a=2-\sqrt[3]{4}$

参考　x 軸の方程式は $y=0$ で，これは $y=ax$ において $a=0$ とおいたものである。

よって，上の式 $S_1=\frac{1}{6}(2-a)^3$ で $a=0$ とおくと，S_1 は S を表す。

したがって，$S=\frac{1}{6}(2-0)^3=\frac{4}{3}$ としても求められる。

注意

面積を求めるには$\boxed{\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3}$を利用する。

$(2-a)^3=4$の左辺は展開しないで，3乗根の性質で$2-a=\sqrt[3]{4}$として計算する。

11 面積の最大・最小

点 $(1,\ 2)$ を通る直線と放物線 $y=x^2$ で囲まれる部分の面積を S とする。S の最小値を求めよ。

解説

点 $(1,\ 2)$ を通る傾き m の直線の方程式は

$y=m(x-1)+2$ …… ①　と表される。

直線 ① と放物線 $y=x^2$ の共有点の x 座標は

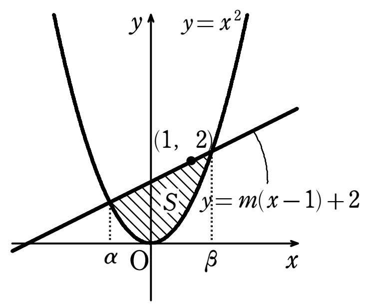
$x^2=m(x-1)+2$

すなわち　$x^2-mx+m-2=0$

を満たす。この 2 次方程式の判別式を D とすると

$D=(-m)^2-4(m-2)=m^2-4m+8$

$=(m-2)^2+4$



常に $D>0$ であるから，直線 ① と放物線 $y=x^2$ は常に異なる 2 点で交わる。

その 2 つの交点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とすると

$$S=\int_\alpha^\beta\{m(x-1)+2-x^2\}dx=-\int_\alpha^\beta(x^2-mx+m-2)dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

また　　$\beta-\alpha=\frac{m+\sqrt{D}}{2}-\frac{m-\sqrt{D}}{2}=\sqrt{D}=\sqrt{(m-2)^2+4}$

したがって，正の数 $\beta-\alpha$ は，$m=2$ のとき最小で，このとき $(\beta-\alpha)^3$ も最小であり，

S の最小値は　$\frac{1}{6}(\sqrt{4})^3=\frac{4}{3}$

注意

面積を求めるには$\boxed{\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3}$を利用する。

$S=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$なので，$S$が最小になるには$\beta-\alpha$が最小になればよい。

$\beta-\alpha$のβとαは解の公式から求める。解の公式の$\sqrt{\ }$の中はDなので

$\beta-\alpha=\frac{m+\sqrt{D}}{2}-\frac{m-\sqrt{D}}{2}$とすれば計算しやすい。

12 絶対値を含む関数の定積分

次の定積分を求めよ。

(1)　$\int_0^3|x-2|dx$　　　(2)　$\int_1^3|x^2-4|dx$

解説

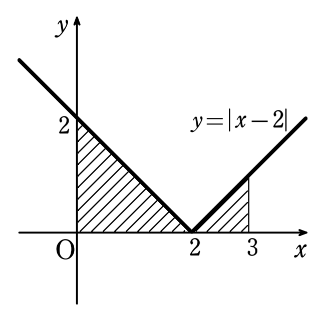
(1)　$0\leqq x\leqq 2$ のとき　$|x-2|=-(x-2)$

$2\leqq x\leqq 3$ のとき　$|x-2|=x-2$

$$(与式)=-\int_0^2(x-2)dx+\int_2^3(x-2)dx$$

$$=-\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_0^2+\left[\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^3$$

$$=-(2-4)+\left\{\left(\frac{9}{2}-6\right)-(2-4)\right\}=\frac{5}{2}$$



別解　求める定積分は，図の斜線部分の面積に等しいから　　$(与式)=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2+\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\frac{5}{2}$

(2)　$1 \leqq x \leqq 2$ のとき　$|x^2-4|=-(x^2-4)$

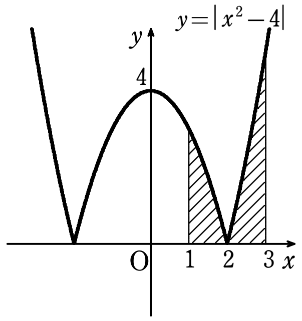
　　$2 \leqq x \leqq 3$ のとき　$|x^2-4|=x^2-4$

$$(\text{与式})=-\int_1^2(x^2-4)dx+\int_2^3(x^2-4)dx$$

$$=-\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_1^2+\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_2^3$$

$$=-\left\{\left(\frac{8}{3}-8\right)-\left(\frac{1}{3}-4\right)\right\}+\left\{(9-12)-\left(\frac{8}{3}-8\right)\right\}$$

$$=4$$



注意

$a \geqq 0$ のとき　$|a|=a$,　$a<0$ のとき　$|a|=-a$

絶対値を含む定積分の計算は，まずグラフを書いて上下関係を調べる。