1 微分係数

関数 $f(x)=x^3-3x$ の $x=2$ における微分係数を求めよ。

解説

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\{(2+h)^3-3(2+h)\}-(2^3-3\cdot 2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{9h+6h^2+h^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(9+6h+h^2)}{h}=\lim_{h\to 0}(9+6h+h^2)=9$$

＜公式＞

微分係数　$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

2 定義による導関数

定義に従って，次の関数の導関数を求めよ。

(1)　$f(x)=-2x+3$　　(2)　$f(x)=x^2-4x+1$

解説

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(1)　$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\{-2(x+h)+3\}-(-2x+3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2h}{h}=-2$

(2)　$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)^2-4(x+h)+1\}-(x^2-4x+1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2x-4)h+h^2}{h}$

$=\lim_{h\to 0}(2x-4+h)=2x-4$

＜公式＞

導関数　$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

3 微分計算

次の関数を微分せよ。

(1)　$y=-\frac{x^2}{2}+3$　　(2)　$y=-x^2+x^3$　　(3)　$y=2(x+5)(x-1)$

(4)　$y=(x+1)(2x^2-x+1)$　　(5)　$y=(x+2)^3$

解説

(1)　$y'=-\frac{1}{2}\cdot 2x=-x$

(2)　$y'=-2x+3x^2$

(3)　$y=2x^2+8x-10$ であるから　$y'=2\cdot 2x+8=4x+8$

(4)　$y=2x^3+x^2+1$ であるから　$y'=2\cdot 3x^2+2x=6x^2+2x$

(5)　$y=x^3+6x^2+12x+8$ であるから　$y'=3x^2+6\cdot 2x+12=3x^2+12x+12$

別解

(5)　$y'=3(x+2)^2=3(x^2+4x+4)=3x^2+12x+12$

＜公式＞

$(x^n)'=nx^{n-1}$　　$(c)'=0$　　(n は自然数)

$\{(x+a)^n\}'=n(x+a)^{n-1}$

4 接線の方程式(1)

(1)　曲線 $y=x^3$ 上の点 $(2,\ 8)$ における接線の方程式を求めよ。

(2)　曲線 $y=-x^3+x$ に接し，傾きが -2 である直線の方程式を求めよ。

解説

(1)　$f(x)=x^3$ とすると

$f'(x)=3x^2$

点 $(2,\ 8)$ における接線の傾きは

$f'(2)=12$

よって，求める接線の方程式は

$y-8=12(x-2)$

すなわち　$y=12x-16$

(2)　$f(x)=-x^3+x$ とすると

$f'(x)=-3x^2+1$

点 $(a,\ -a^3+a)$ における接線の方程式は

$y-(-a^3+a)=(-3a^2+1)(x-a)$ …… ①

この直線の傾きが -2 であるとすると

$-3a^2+1=-2$

ゆえに　$a^2=1$　　よって　$a=\pm 1$

① から　$a=1$ のとき　$y=-2(x-1)$

$a=-1$ のとき　$y=-2(x+1)$

したがって　$y=-2x+2,\ y=-2x-2$

＜公式＞

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $A(a,\ f(a))$ における接線の方程式は　$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

注意

接線の方程式の公式は，図形と方程式の直線の方程式の公式，

点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，傾きが m の直線の方程式は　$y-y_1=m(x-x_1)$

で傾き m を $f'(a)$ としただけである。

5 接線の方程式(2)

点 $(2,\ -2)$ から，曲線 $y=\frac{1}{3}x^3-x$ に引いた接線の方程式を求めよ。

解説

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$ とすると

$f'(x)=x^2-1$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

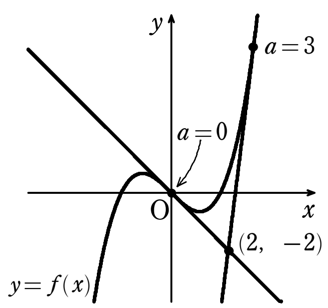
$y-\left(\frac{1}{3}a^3-a\right)=(a^2-1)(x-a)$

すなわち　$y=(a^2-1)x-\frac{2}{3}a^3$ …… ①

この直線が点 $(2,\ -2)$ を通るから

$-2=(a^2-1)\cdot 2-\frac{2}{3}a^3$

整理すると　$a^2(a-3)=0$　　ゆえに　$a=0,\ 3$



求める接線の方程式は，この a の値を ① に代入して

$a=0$ のとき　$y=-x$，　$a=3$ のとき　$y=8x-18$

注意

接線の方程式を求める問題では主に以下の2タイプがある。

①接点の座標が与えられているとき　⇒　4(1)のタイプ

公式　$y-f(a)=f'(a)(x-a)$　にそのまま代入していけばよい

②接点の座標が与えられていないとき　⇒　4(2)、5のタイプ

接点が問題で与えられていないときは，接点の座標を自分でおかなければならない。

例えば4(2)では、$y=-x^3+x$ なので接点を $(a,\ -a^3+a)$ とおく。

その後，公式　$y-f(a)=f'(a)(x-a)$ を利用する。

6 法線の方程式

曲線 $y=\frac{2}{9}x^3-\frac{5}{3}x$ について，次のものを求めよ。

(1)　曲線上の点 $\left(2,\ -\frac{14}{9}\right)$ における法線の方程式

(2)　(1) で求めた法線と曲線の共有点のうち，点 $\left(2,\ -\frac{14}{9}\right)$ 以外の点の座標

解説

(1)　$f(x)=\frac{2}{9}x^3-\frac{5}{3}x$ とすると　$f'(x)=\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{3}$

よって，点 $\left(2,\ -\frac{14}{9}\right)$ における接線の傾きは

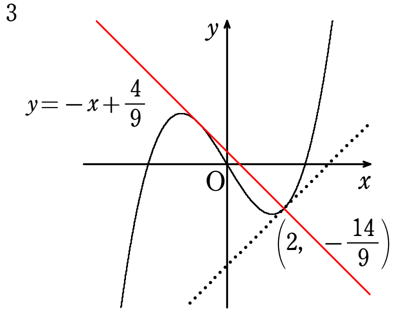
$f'(2)=\frac{2}{3}\cdot 2^2-\frac{5}{3}=1$

ゆえに，法線の傾きは -1 である。

したがって，求める法線の方程式は

$y-\left(-\frac{14}{9}\right)=-1\cdot(x-2)$

すなわち　$y=-x+\frac{4}{9}$



(2)　求める共有点の x 座標は，次の方程式の $x=2$ 以外の実数解である。

$\frac{2}{9}x^3-\frac{5}{3}x=-x+\frac{4}{9}$

整理して　$x^3-3x-2=0$

よって　$(x-2)(x+1)^2=0$

したがって，求める点の x 座標は，$x=-1$ であり，求める共有点の座標は

$\left(-1,\ \frac{13}{9}\right)$

注意

法線とは接線に直交する直線。

傾き m_1，m_2 の2直線が直交するときは　$m_1\cdot m_2=-1$ が成り立つ。

したがって，本問題(1)では接線の傾きが1なので法線の傾きは -1 となる。

7 共通接線

2つの放物線 $y=-x^2$, $y=x^2-2x+5$ の共通接線の方程式を求めよ。

解説

$y=-x^2$ に対して　$y'=-2x$

よって，放物線 $y=-x^2$ 上の点 $(a,\ -a^2)$ における接線の方程式は

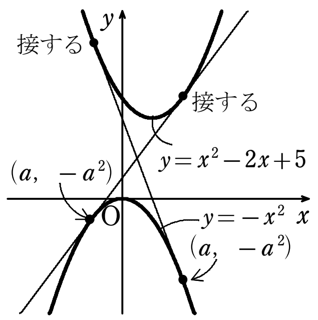
$$y-(-a^2)=-2a(x-a)$$

すなわち　$y=-2ax+a^2$　…… ①

この直線が放物線 $y=x^2-2x+5$ にも接するための条件は，2次方程式

$x^2-2x+5=-2ax+a^2$　すなわち

$x^2+2(a-1)x-a^2+5=0$　…… ② が重解をもつことである。



ゆえに，② の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(a-1)^2-1\cdot(-a^2+5)=2a^2-2a-4=2(a+1)(a-2)=0$$

よって　$a=-1,\ 2$

この値を ① に代入して，求める共通接線の方程式は　$y=2x+1$, $y=-4x+4$

別解【①を求めた後】

$y=x^2-2x+5$についても$y=-x^2$と同様に接線の方程式をつくる。

$y'=2x-2$なので$y=x^2-2x+5$上の点$(b,\ b^2-2b+5)$における接線の方程式は

$$y-(b^2-2b+5)=(2b-2)(x-b)$$

すなわち　$y=(2b-2)x-b^2+5$　…… ②

共通な接線であるので，①と②が一致する。

傾きについて　$2b-2=-2a$　変形して$b=1-a$ …… ③

切片について　$a^2=-b^2+5$　…… ④

③を④に代入して整理すると$a^2-a-2=0$，よって$a=-1,\ 2$

この値を ① に代入して，求める共通接線の方程式は　$y=2x+1$, $y=-4x+4$

8 3次関数のグラフ

関数 $y=-x^3-3x^2+9x$ の極値を求め，グラフをかけ。

解説

$y'=-3x^2-6x+9=-3(x+3)(x-1)$

$y'=0$ とすると　$x=-3,\ 1$

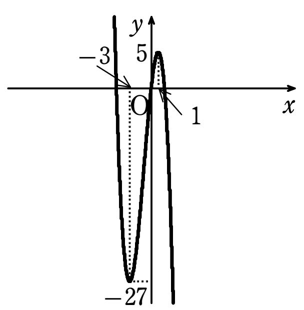
y の増減表は，次のようになる。

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小	↗	極大	↘

よって，$x=-3$ のとき極小値 -27,

$x=1$ のとき極大値 5　をとる。

また，グラフは右の図のようになる。



9 極値と関数の決定

関数$f(x)=x^3+ax^2+bx+1$が$x=-1$で極大となり，$x=1$で極小となるように定数a, bの値および極値を求めよ。

解説

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$x=-1$, $x=1$で極値をとるから，

$f'(-1)=0$, $f'(1)=0$

ゆえに，$\begin{cases}3-2a+b=0\\3+2a+b=0\end{cases}$

これを解くと，$a=0$, $b=-3$

このとき，　$f'(x)=3x^2-3$
$=3(x+1)(x-1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

増減表は右のようになり，

$f(x)$は$x=-1$で極大となり，$x=1$で極小となる。

したがって，極大値は$f(-1)=3$，極小値は$f(1)=-1$

10 極値をもつための条件

(1)　関数 $f(x)=x^3+ax^2$ が極値をもつとき，定数 a の満たすべき条件を求めよ。

(2)　関数 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+3kx$ が極大値と極小値をもつような定数 k の値の範囲を求めよ。

(3)　関数 $f(x)=x^3+ax^2+x+1$ が極値をもたないための必要十分条件を求めよ。ただし，a は定数とする。

解説

(1)　$f'(x)=3x^2+2ax=x(3x+2a)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=0,\ -\frac{2}{3}a$

$f(x)$ が極値をもつための条件は，$f'(x)=0$ が異なる2つの実数解をもつことであるから　$a\neq0$

別解

$f'(x)=0$が異なる2つの実数解をもつには，$f'(x)$の判別式Dが$D>0$を満たせばよい。

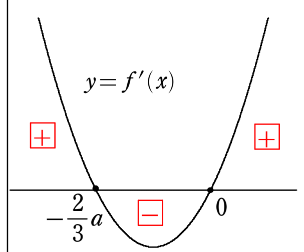
$f'(x)=3x^2+2ax$なので，$D/4=a^2>0$　これを満たすaは$a\neq0$

注意

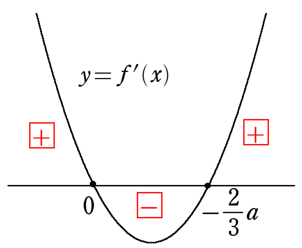
(1)極値をもつためには$f'(x)=0$を満たすxの前後で$f'(x)$の符号が異なる必要がある。

本問題では以下の2パターンある。

(i) $a>0$のとき



(ii)$a<0$のとき



(2)　$f'(x)=\frac{3}{2}x^2-6x+3k=\frac{3}{2}(x^2-4x+2k)$

$f(x)$ が極大値と極小値をもつための条件は，$f'(x)=0$ が異なる2つの実数解をもつことである。

よって，$x^2-4x+2k=0$ の判別式を D とすると

$\frac{D}{4}=2^2-1\cdot2k>0$　　ゆえに　$k<2$

(3)　$f'(x)=3x^2+2ax+1$

$f(x)$ が極値をもたないための必要十分条件は，$f'(x)$ の符号が変わらないことである。ゆえに，$f'(x)=0$ すなわち $3x^2+2ax+1=0$　…… ① は実数解を1つだけもつかまたは実数解をもたない。よって，① の判別式を D とすると

$\frac{D}{4}=a^2-3\cdot1\leqq0$

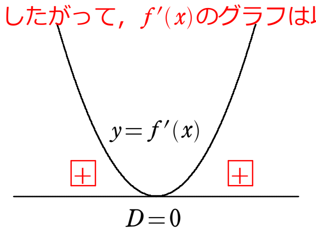
ゆえに　$(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})\leqq0$　　よって　$-\sqrt{3}\leqq a\leqq\sqrt{3}$

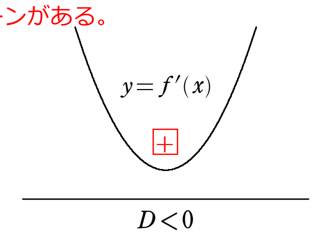
注意

(3)極値をもたない

⇒　$f'(x)$の符号が変わらない

したがって，$f'(x)$のグラフは以下の2パターンがある。





ゆえに，$D\leqq0$となればよい。

11 つねに増加するための条件

関数$f(x)=x^3+ax^2+3x-1$がつねに増加するように，定数aの値の範囲を定めよ。

解説

$f(x)$がつねに増加するための条件は，つねに

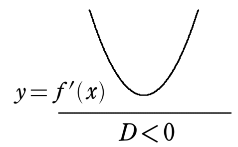
$f'(x)=3x^2+2ax+3\geqq0$　が成り立つことである。

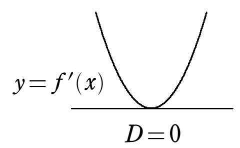
x^2の係数が正であるから

$3x^2+2ax+3=0$の判別式$D\leqq0$ならばよい。

$\frac{D}{4}=a^2-9=(a+3)(a-3)\leqq0$

よって　$-3\leqq a\leqq3$





注意

$f(x)$がつねに増加する　⇔　すべてのxで$f'(x)\geqq0$

$f'(x)$のグラフを考えると，$D\geqq0$となればいいことがわかる。

12 最大・最小

関数$y=x^3-6x^2+10$ $(-2\leqq x\leqq 3)$の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

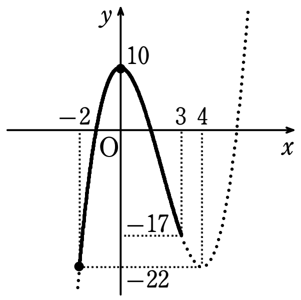
解説

$y'=3x^2-12x=3x(x-4)$

$y'=0$ とすると　$x=0,\ 4$

区間 $-2\leqq x\leqq 3$ における y の増減表は，次のようになる。

x	-2	…	0	…	3
y'		$+$	0	$-$	
y	-22	↗	極大 10	↘	-17



よって　$x=0$ で最大値 10，

$x=-2$ で最小値 -22

13 文字係数の最大・最小

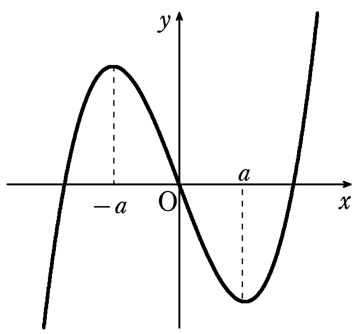
関数 $f(x)=x^3-3a^2x$ $(0\leqq x\leqq 1)$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を次の各場合について求めよ。ただし，a は定数とする。

(1)　$0\leqq a<1$　　(2)　$1\leqq a$

解説

$f'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$

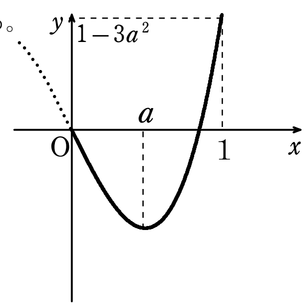
$f'(x)=0$ とすると　$x=\pm a$



(1)　$0\leqq a<1$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の増減表は，次のようになる。

x	0	…	a	…	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	極小	↗	$1-3a^2$



よって，$f(x)$ は $x=a$ のとき極小かつ最小となる。

最大値は　$f(0)$　または　$f(1)$

ここで，$f(0)=f(1)$ すなわち $1-3a^2=0$ を満たす a の値は，$0\leqq a<1$ であるから

$a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

ゆえに　$0\leqq a<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき　$f(0)<f(1)$

$a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　のとき　$f(0)=f(1)$

$\dfrac{\sqrt{3}}{3}<a<1$ のとき　$f(0)>f(1)$

したがって

$0\leqq a<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき $x=1$ で最大値 $1-3a^2$，$x=a$ で最小値 $-2a^3$

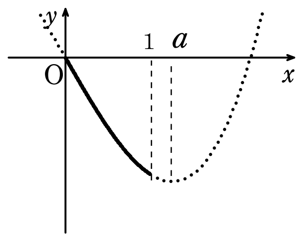
$a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のとき $x=0$，1 で最大値 0，$x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ で最小値 $-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

$\dfrac{\sqrt{3}}{3}<a<1$ のとき $x=0$ で最大値 0，$x=a$ で最小値 $-2a^3$

(2)　$1\leqq a$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ で $f'(x)\leqq 0$ であるから，$f(x)$ はこの範囲で常に減少する。

したがって　$x=0$ で最大値 0，$x=1$ で最小値 $1-3a^2$



注意

本問題は関数に文字aが含まれているのでグラフが動く。

範囲は$0\leqq x\leqq 1$なので範囲は動かない。

(1)では$f(0)$と$f(1)$の値が等しいときは最大値が2箇所ある。

$f(0)<f(1)$のときと$f(0)=f(1)$，$f(0)>f(1)$で場合わけする。

14 定義域が変化する場合の最大・最小

$a>0$ とする。関数 $f(x)=x^3-3x^2+2$ の $0\leqq x\leqq a$ における最大値，最小値を求めよ。

解説

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=0,\ 2$

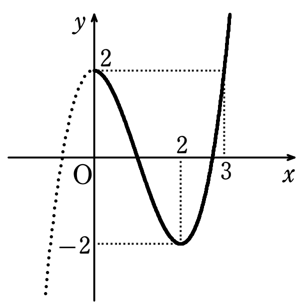
$x\geqq 0$ における $f(x)$ の増減表は，右のようになる。

x	0	…	2	…
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	2	↘	-2	↗

また，$f(x)=2$ とすると　$x^3-3x^2+2=2$

よって　$x^2(x-3)=0$　　ゆえに　$x=0,\ 3$

$x\geqq 0$ における $y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



したがって，$0<a<2$ のとき

$x=0$ で最大値 2，

$x=a$ で最小値 a^3-3a^2+2

$2\leqq a<3$ のとき

$x=0$ で最大値 2，$x=2$ で最小値 -2

$a=3$ のとき

$x=0$，3 で最大値 2，$x=2$ で最小値 -2

$3<a$ のとき

$x=a$ で最大値 a^3-3a^2+2，$x=2$ で最小値 -2

注意

本問題はグラフは動かず,範囲が動く。

$f(3)=f(0)=2$に注意して場合わけをしていく。

15 $f(x)=a$の実数解

方程式 $x^3-3x+a=0$ の異なる実数解の個数を求めよ。ただし，a は定数とする。

解説

方程式を変形すると　$-x^3+3x=a$

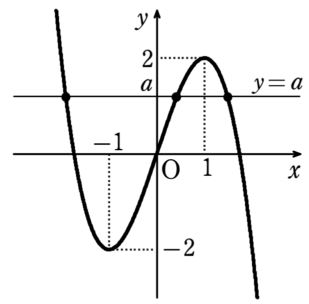
$y=-x^3+3x$ とおくと

$y'=-3x^2+3=-3(x^2-1)=-3(x+1)(x-1)$

$y'=0$ とすると　$x=\pm 1$

y の増減表は，次のようになる。

x	…	-1	…	1	…
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	-2	↗	2	↘



関数 $y=-x^3+3x$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数が，方程式の実数解の個数に一致するから，図より

$a<-2$，$2<a$ のとき　1 個；

$a=-2$，2 のとき　2 個；

$-2<a<2$ のとき　3 個

注意

定数aを含む方程式の解を考えるにはまず$f(x)=a$の形に変形する。

方程式$f(x)=a$の実数解の個数は$y=f(x)$のグラフと直線$y=a$の共有点の個数に一致するのでグラフで考える。

16 不等式の証明

$x\geqq 0$ のとき　$x^3+3x^2-9x+5\geqq 0$が成り立つことを証明せよ。

解説

$f(x)=x^3+3x^2-9x+5$ とすると

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x-1)(x+3)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=1,\ -3$

$x\geqq 0$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	…	1	…
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	5	↘	極小 0	↗

ゆえに，$x\geqq 0$ のとき，$f(x)$ は

$x=1$ で最小値 0

をとる。

よって，$x\geqq 0$ のとき　$f(x)\geqq 0$

したがって　$x^3+3x^2-9x+5\geqq 0$

注意

3次以上の不等式を証明するには微分を使用する。

$P(x)\geqq Q(x)$を示すには，$f(x)=P(x)-Q(x)$とおいて，$f(x)$の増減表を用いて(最小値)$\geqq 0$を示す。