第１問

［１］

連立方程式 (＊) $\begin{cases} xy=128 & \cdots\cdots ① \\ \dfrac{1}{\log_2 x}+\dfrac{1}{\log_2 y}=\dfrac{7}{12} & \cdots\cdots ② \end{cases}$ を満たす正の実数 x, y を求めよう。

ただし，$x \fallingdotseq 1$, $y \fallingdotseq 1$ とする。① の両辺で 2 を底とする対数をとると $\log_2 x+\log_2 y=\boxed{\text{ア}}$ が成り立つ。

これと ② より $(\log_2 x)(\log_2 y)=\boxed{\text{イウ}}$ である。

したがって，$\log_2 x$，$\log_2 y$ は2次方程式 $t^2 - \boxed{\text{エ}}\,t + \boxed{\text{オカ}} = 0$ ……③ の解である。

③の解は $t = \boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ である。ただし，$\boxed{\text{キ}}$ と $\boxed{\text{ク}}$ は解答の順序を問わない。よって，連立方程式(＊)の解は $(x,\ y) = \left(\boxed{\text{ケ}},\ \boxed{\text{コサ}}\right)$ または $(x,\ y) = \left(\boxed{\text{コサ}},\ \boxed{\text{ケ}}\right)$ である。

［２］

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $\sin 4\theta=\cos\theta$ ……① を満たす θ と $\sin\theta$ の値を求めよう。

一般に，すべての x について $\cos x=\sin\left(\boxed{\text{シ}}-x\right)$ である。$\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ② のうちから一つ選べ。

⓪ π　　① $\dfrac{\pi}{2}$　　② $-\dfrac{\pi}{2}$

したがって，① が成り立つとき，

$\sin 4\theta=\sin\left(\boxed{\text{シ}}-\theta\right)$ となり，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で 4θ，$\boxed{\text{シ}}-\theta$ のとり得る値の範囲を考えれば，$4\theta=\boxed{\text{シ}}-\theta$ または$4\theta=\pi-\left(\boxed{\text{シ}}-\theta\right)$ となる。

よって，① を満たす θ は $\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ス}}}$ または

$\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{セソ}}}$ である。

$\sin\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ス}}}=\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ である。$\sin\dfrac{\pi}{\boxed{\text{セソ}}}$ の値を求めよう。① より $\boxed{\text{ツ}}\sin 2\theta\cos 2\theta=\cos\theta$ となり，

この式の左辺を 2 倍角の公式を用いて変形すれば

$\left(\boxed{\text{テ}}\sin\theta-\boxed{\text{ト}}\sin^3\theta\right)\cos\theta=\cos\theta$ となる。

ここで $\cos\theta>0$ であるから

$\boxed{\text{ト}}\sin^3\theta-\boxed{\text{テ}}\sin\theta+1=0$ …… ② が成り立つ。

$\sin\theta=\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ は ② を満たしている。$\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{\text{セソ}}}$ とすると，$\sin\theta\fallingdotseq\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ であるから

$\boxed{\text{ナ}}\sin^2\theta+\boxed{\text{ニ}}\sin\theta-1=0$ となる。ここで，

$\sin\dfrac{\pi}{\boxed{\text{セソ}}}>0$ より

$\sin\dfrac{\pi}{\boxed{\text{セソ}}}=\dfrac{\boxed{\text{ヌネ}}+\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ である。

$\boxed{\text{第２問}}$

k を実数とし，座標平面上に点 P(1, 0) をとる。曲線 $y=-x^3+9x^2+kx$ を C とする。

(1)　点 $\mathrm{Q}(t,\ -t^3+9t^2+kt)$ における曲線 C の接線が点 P を通るとすると

$-\boxed{\text{ア}}t^3+\boxed{\text{イウ}}t^2-\boxed{\text{エオ}}t=k$ が成り立つ。

$p(t)=-\boxed{\text{ア}}t^3+\boxed{\text{イウ}}t^2-\boxed{\text{エオ}}t$ とおくと，関数 $p(t)$ は $t=\boxed{\text{カ}}$ で極小値 $\boxed{\text{キク}}$ をとり，

$t=\boxed{\text{ケ}}$ で極大値 $\boxed{\text{コ}}$ をとる。

したがって，点 P を通る曲線 C の　接線の本数がちょうど 2 本となるのは，k の値が $\boxed{\text{サ}}$ または $\boxed{\text{シス}}$ のときである。

また，点 P を通る曲線 C の接線の本数は $k=5$ のとき $\boxed{\text{セ}}$ 本，$k=-2$ のとき $\boxed{\text{ソ}}$ 本，$k=-12$ のとき $\boxed{\text{タ}}$ 本となる。

(2)　$k=0$ とする。曲線 $y=-x^3+6x^2+7x$ を D とする。
曲線 C と D の交点の x 座標は

$\boxed{\text{チ}}$ と $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である。$-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲におい

て，2 曲線 C，D および 2 直線
　$x=-1$，$x=2$ で囲まれた二つの図形の面積の和は

$\dfrac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ である。

第３問

自然数の列 1，2，3，4，…… を，次のように群に分ける。

1 ｜ 2，3，4，5 ｜ 6，7，8，9，10，11，12 ｜ ……
第 1 群　第 2 群　第 3 群

ここで，一般に第 n 群は $(3n-2)$ 個の項からなるものとする。第 n 群の最後の項を a_n
で表す。

(1)　$a_1=1$，$a_2=5$，$a_3=12$，$a_4=\boxed{アイ}$ である。$a_n-a_{n-1}=\boxed{ウ}n-\boxed{エ}$

$(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$ が成り立ち，$a_n=\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}n^{\boxed{キ}}-\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

である。よって，600 は，第 $\boxed{コサ}$ 群の小さい方から $\boxed{シス}$ 番目の項である。

(2)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対し，第 $(n+1)$ 群の小さい方から $2n$ 番目の項を b_n で表すと

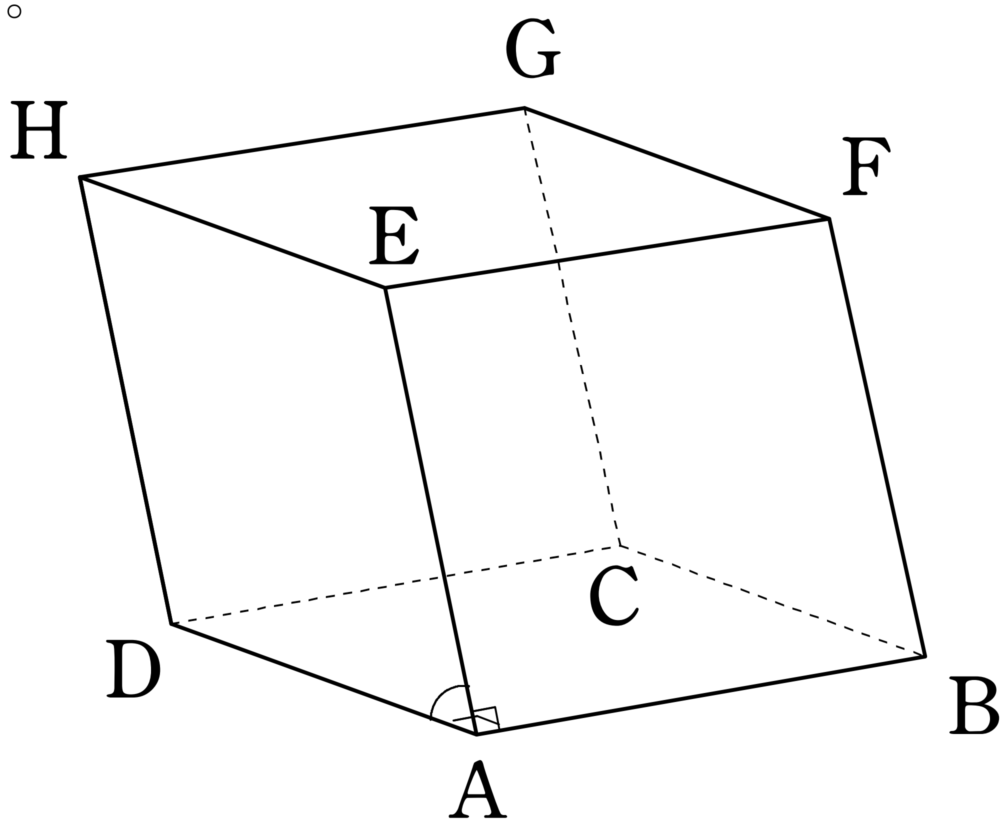
$$b_n=\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}n^{\boxed{\text{タ}}}+\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}n$$ であり，$\dfrac{1}{b_n}$

$$=\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+\boxed{\text{ナ}}}\right)$$ が成り立つ。

これより，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}=\frac{\boxed{\text{ニ}}\,n}{\boxed{\text{ヌ}}\,n+\boxed{\text{ネ}}}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ となる。

第４問

二つずつ平行な三組の平面で囲まれた立体を平行六面体という。辺の長さがすべて1の平行六面体ABCD－EFGHがあり，$\angle \mathrm{EAB}=\angle \mathrm{DAB}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle \mathrm{EAD}=\dfrac{\pi}{3}$ である。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{q}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{r}$ とおく。



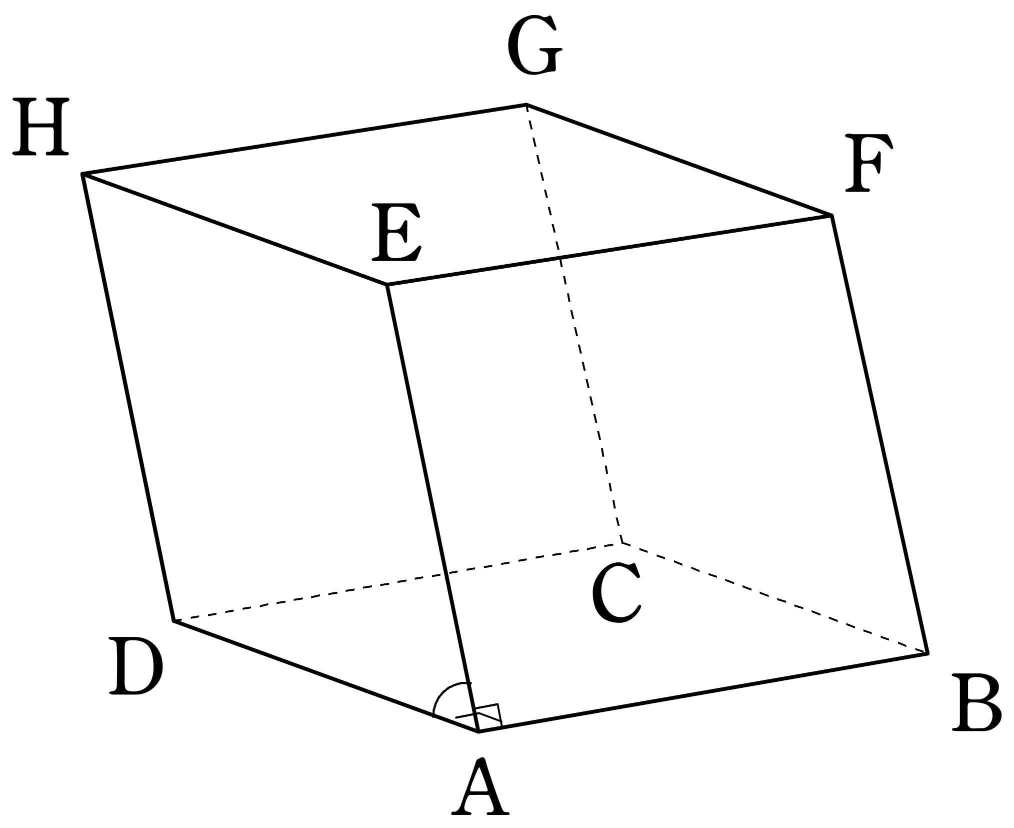
$0<a<1$，$0<b<1$ とする。辺 AB を $a:(1-a)$ の比に内分する点を X，辺 BF を $b:(1-b)$ の比に内分する点を Y とする。点 X を通り直線 AH に平行な直線と辺 GH との交点を Z とする。三角形 XYZ を含む平面を α とする。

(1)　$\vec{p}\cdot\vec{q}=\vec{p}\cdot\vec{r}=\boxed{\text{ア}}$，$\vec{q}\cdot\vec{r}=\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{XY}}$ は，a，b，$\vec{p}$，$\vec{r}$ を用いて

$\overrightarrow{\mathrm{XY}}=\left(1-\boxed{\text{エ}}\right)\vec{p}+\boxed{\text{オ}}\,\vec{r}$ と表される。

$\overrightarrow{\mathrm{EC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{XZ}}=\boxed{\text{カ}}$ である。

(2)　直線 EC と平面 α が垂直に交わるとし，交点を K とする。$\overrightarrow{\mathrm{EC}}$ が三角形 XYZ の 2辺と垂直であることから，$\boxed{\text{キ}}\,a+b=\boxed{\text{ク}}$ が成り立つ。



以下では，$b=\dfrac{1}{2}$ とする。このとき $a=\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。

$\overrightarrow{\mathrm{EK}}$ を実数 c を用いて $\overrightarrow{\mathrm{EK}}=c\overrightarrow{\mathrm{EC}}$ と表すと，

$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\overrightarrow{\mathrm{AE}}+c\overrightarrow{\mathrm{EC}}$ である。一方，点 K は平面 α 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{AK}}$ は実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\overrightarrow{\mathrm{AX}}+s\overrightarrow{\mathrm{XY}}+t\overrightarrow{\mathrm{XZ}}$$

$$=\left(\frac{1}{\boxed{\text{サ}}}s+\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\right)\vec{p}+t\vec{q}+\left(\frac{1}{\boxed{\text{シ}}}s+t\right)\vec{r}$$

と表される。これらより，$c=\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。よって，点 E と平面 α との距離 $\left|\overrightarrow{\mathrm{EK}}\right|$

は $\dfrac{\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$ となる。