1 三角比の相互関係

θ は鋭角とする。$\tan\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1)　$\cos\theta$　　(2)　$\sin\theta$

解説

(1)　$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$　　よって　$\cos^2\theta=\dfrac{4}{5}$

$\cos\theta>0$ であるから　$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{4}{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

(2)　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

2 三角方程式

$0°\leqq\theta\leqq180°$ のとき，次の等式を満たす θ の値を求めよ。

(1)　$2\sin\theta=1$　　(2)　$\sqrt{2}\cos\theta=1$　　(3)　$\sqrt{3}\tan\theta=-1$

解説

(1)　$2\sin\theta=1$ から　$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

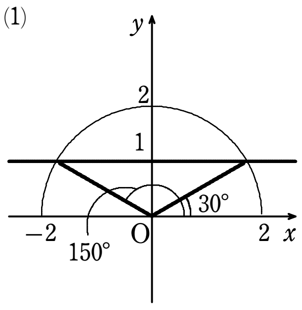
［図］から　$\theta=30°,\ 150°$

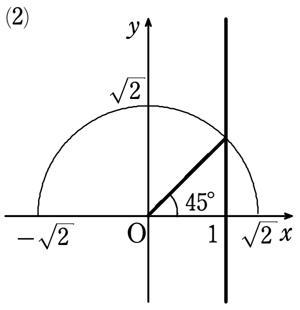
(2)　$\sqrt{2}\cos\theta=1$ から　$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

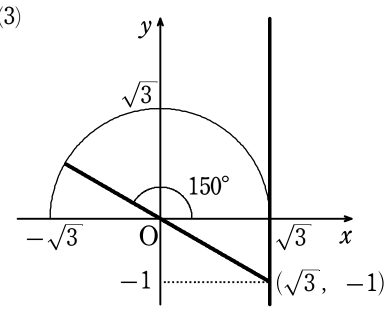
［図］から　$\theta=45°$

(3)　$\sqrt{3}\tan\theta=-1$ から　$\tan\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

［図］から　$\theta=150°$

(1)


(2)


(3)


3 三角不等式

$0°\leqq\theta\leqq180°$ とする。次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1)　$\sin\theta>\dfrac{1}{2}$　　(2)　$\cos\theta<-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(3)　$\tan\theta\geqq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

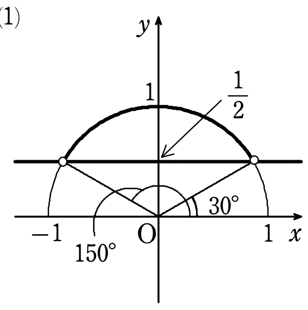
解説

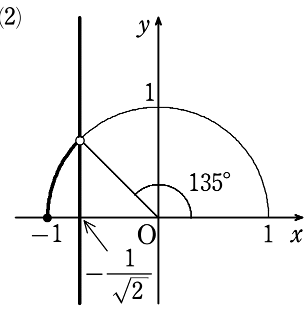
(1)　$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ を満たす θ は　$\theta=30°,\ 150°$

［図］から，不等式を満たす θ の値の範囲は　$30°<\theta<150°$

(2)　$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ は　$\theta=135°$

［図］から，不等式を満たす θ の値の範囲は　$135°<\theta\leqq180°$

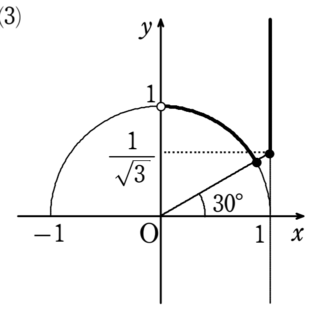
(1)


(2)


(3)　$\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす θ は　$\theta=30°$

［図］から，不等式を満たす θ の値の範囲は

$30°\leqq\theta<90°$

(3)


4 $90°-\theta$，$180°-\theta$

次の式の値を求めよ。

(1)　$\sin(90°-\theta)-\cos(90°-\theta)+\sin(180°-\theta)+\cos(180°-\theta)$

(2)　$\sin(90°+\theta)\sin(90°-\theta)-\cos(90°+\theta)\cos(90°-\theta)$

解説

(1)　(与式)$=\cos\theta-\sin\theta+\sin\theta-\cos\theta=0$

(2)　$\sin(90°+\theta)=\sin\{180°-(90°-\theta)\}=\sin(90°-\theta)=\cos\theta$

$\cos(90°+\theta)=\cos\{180°-(90°-\theta)\}=-\cos(90°-\theta)=-\sin\theta$

よって　(与式)$=\cos\theta\cdot\cos\theta-(-\sin\theta)\sin\theta=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

5 正弦定理，余弦定理(1)

△ABC において，次のものを求めよ。

(1)　$A=75°$，$B=45°$，$c=\sqrt{6}$ のとき　b

(2)　$a=\sqrt{7}$，$b=1$，$c=2$ のとき　A

解説

(1)　$C=180°-(75°+45°)=60°$

正弦定理により　$\dfrac{b}{\sin45°}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sin60°}$

よって　$b=\dfrac{\sqrt{6}\sin45°}{\sin60°}=\sqrt{6}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}=2$

(2)　余弦定理により　$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1^2+2^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot1\cdot2}=-\dfrac{1}{2}$

よって　$A=120°$

6 円に内接する四角形(1)

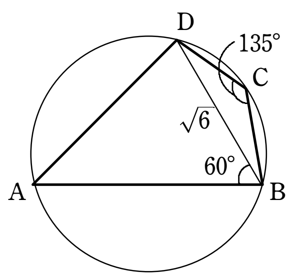
右の図のような円に内接する四角形 ABCD において，

$\angle ABD=60°$，$\angle BCD=135°$，$BD=\sqrt{6}$

のとき，次のものを求めよ。

(1)　円の半径 R

(2)　辺 AD の長さ



解説

(1)　△BCD において，正弦定理により　$\dfrac{\sqrt{6}}{\sin135°}=2R$

よって　$R=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{3}$

(2)　四角形 ABCD は円に内接しているから　$\angle BAD+\angle BCD=180°$

よって　$\angle BAD=180°-\angle BCD=180°-135°=45°$

ゆえに，△ABD において，正弦定理により　$\dfrac{\sqrt{6}}{\sin45°}=\dfrac{AD}{\sin60°}$

したがって　$AD=\dfrac{\sqrt{6}\sin60°}{\sin45°}=\sqrt{6}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2}=3$

7 正弦定理と3辺の比

△ABC において，$a:b=1:2$，$B=45°$ であるとき，次のものを求めよ。

(1)　$\sin A$ の値　　(2)　$c=\sqrt{2}$ のとき　a

解説

(1)　$a:b=1:2$ であるから　$b=2a$

正弦定理により　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin45°}$

よって　$\sin A=\dfrac{a}{b}\sin45°=\dfrac{a}{2a}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

(2)　余弦定理により　$(2a)^2=a^2+(\sqrt{2})^2-2a\cdot\sqrt{2}\cos45°$

すなわち　$4a^2=a^2+2-2a\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

整理して　$3a^2+2a-2=0$

これを解くと　$a=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-3\cdot(-2)}}{3}=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}}{3}$

$a>0$ であるから　$a=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}$

8 正弦定理，余弦定理(2)

次のような △ABC において，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

(1) $b=3$，$c=\sqrt{3}$，$B=60^\circ$　(2) $a=2\sqrt{6}$，$b=\sqrt{6}$，$c=3\sqrt{2}$

(3) $a=\sqrt{2}$，$c=1+\sqrt{3}$，$B=45^\circ$　(4) $a=\sqrt{6}$，$b=\sqrt{3}-1$，$c=2$

解説

(1) 正弦定理により　$\dfrac{3}{\sin 60^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin C}$

よって　$\sin C=\dfrac{\sqrt{3}\sin 60^\circ}{3}=\dfrac{1}{2}$

$B=60^\circ$ より $0^\circ<C<120^\circ$ であるから　$C=30^\circ$

ゆえに　$A=180^\circ-(60^\circ+30^\circ)=90^\circ$

正弦定理により　$\dfrac{a}{\sin 90^\circ}=\dfrac{3}{\sin 60^\circ}$

ゆえに　$a=\dfrac{3\sin 90^\circ}{\sin 60^\circ}=2\sqrt{3}$

(2) 余弦定理により

$$\cos A=\frac{(\sqrt{6})^2+(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{6})^2}{2\cdot\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{2}}=0 \qquad \text{よって}\quad A=90^\circ$$

$$\cos B=\frac{(3\sqrt{2})^2+(2\sqrt{6})^2-(\sqrt{6})^2}{2\cdot 3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{6}}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{よって}\quad B=30^\circ$$

したがって　$C=180^\circ-(90^\circ+30^\circ)=60^\circ$

(3) 余弦定理により　$b^2=(1+\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2-2(1+\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}\cos 45^\circ$

$$=1+2\sqrt{3}+3+2-2(1+\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=4$$

$b>0$ であるから　$b=\sqrt{4}=2$

正弦定理により　$\dfrac{\sqrt{2}}{\sin A}=\dfrac{2}{\sin 45^\circ}$

よって　$\sin A=\dfrac{\sqrt{2}\sin 45^\circ}{2}=\dfrac{1}{2}$

$B=45^\circ$ より $0^\circ<A<135^\circ$ であるから　$A=30^\circ$

ゆえに　$C=180^\circ-(30^\circ+45^\circ)=105^\circ$

(4) 余弦定理により

$$\cos A=\frac{(\sqrt{3}-1)^2+2^2-(\sqrt{6})^2}{2\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot 2}=\frac{2-2\sqrt{3}}{4(\sqrt{3}-1)}=\frac{2(1-\sqrt{3})}{4(\sqrt{3}-1)}=-\frac{1}{2}$$

$$\cos C=\frac{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{3}-1)^2-2^2}{2\cdot\sqrt{6}\cdot(\sqrt{3}-1)}=\frac{6-2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}=\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって　$A=120^\circ$，$C=45^\circ$　　したがって　$B=180^\circ-(120^\circ+45^\circ)=15^\circ$

9 正弦定理の利用

△ABC において，次のものを求めよ。

(1) $a=\sqrt{2}$，$B=45^\circ$，$C=105^\circ$ のとき　b，c，A

(2) $\sin A:\sin B:\sin C=13:8:7$ のとき，最大の角

解説

(1) $A=180^\circ-(45^\circ+105^\circ)=30^\circ$

正弦定理により　$\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}=\dfrac{b}{\sin 45^\circ}$　　よって　$b=\dfrac{\sqrt{2}\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}=2$

余弦定理により　$2^2=c^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot c\cdot\sqrt{2}\cos 45^\circ$

整理して　$c^2-2c-2=0$

これを解くと　$c=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot(-2)}}{1}=1\pm\sqrt{3}$

$c>0$ であるから　$c=1+\sqrt{3}$

(2) 正弦定理により　$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

が成り立つから　$a:b:c=13:8:7$

$a=13$，$b=8$，$c=7$ としても各内角の大きさは同じで，最も大きい辺に対する角が最大であるから，余弦定理により

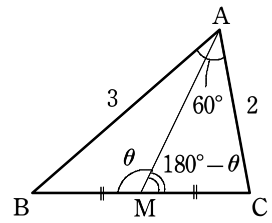
$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{8^2+7^2-13^2}{2\cdot 8\cdot 7}=-\frac{56}{2\cdot 8\cdot 7}=-\frac{1}{2}$$

よって　$A=120^\circ$

10 中線の求め方

△ABC の辺 BC の中点を M とする。$b=2$，$c=3$，$A=60^\circ$ のとき，線分 AM の長さを求めよ。

解説



△ABC において，余弦定理により

$$BC^2=3^2+2^2-2\cdot 3\cdot 2\cos 60^\circ=7$$

$BC>0$ であるから　$BC=\sqrt{7}$

よって　$BM=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

$\angle AMB=\theta$ とおくと　$\angle AMC=180^\circ-\theta$

△AMB に余弦定理を適用すると

$$3^2=AM^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2-2AM\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}\cos\theta \quad\cdots\cdots ①$$

△AMC に余弦定理を適用すると

$$2^2=AM^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2-2AM\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}\cos(180^\circ-\theta) \quad\cdots\cdots ②$$

$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$ であるから，①+② より

$13=2AM^2+\dfrac{7}{2}$　　すなわち　$AM^2=\dfrac{19}{4}$

$AM>0$ であるから　$AM=\dfrac{\sqrt{19}}{2}$

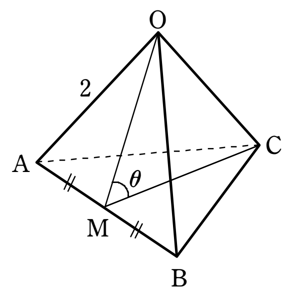
別解　中線定理 $AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$ により

$$3^2+2^2=2\left\{AM^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2\right\}$$

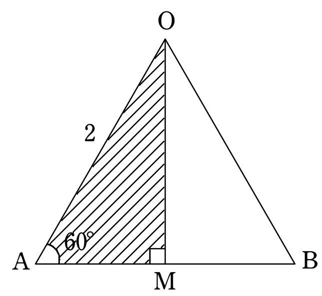
よって　$AM^2=\dfrac{19}{4}$　　したがって　$AM=\dfrac{\sqrt{19}}{2}$

11 正四面体の体積

1 辺の長さが 2 の正四面体 OABC がある。辺 AB の中点を M，$\angle OMC=\theta$ とするとき，線分 OM の長さと $\cos\theta$ の値を求めよ。また四面体OABC の体積を求めよ。



解説



空間図形の問題はは平面で考えよう

△OAMにおいて，OM は辺 AB と垂直であるから

$$OM=OA\sin 60^\circ=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

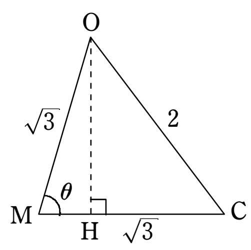
同様に，CM も辺 AB と垂直であるから

$$CM=CA\sin 60^\circ=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

△OMC において，余弦定理により

$$\cos\theta=\frac{OM^2+CM^2-OC^2}{2OM\cdot CM}$$

$$=\frac{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2-2^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$$



また，Oからおろした垂線とMCとの交点をHとすると

$OH=OM\sin\theta$

$=\sqrt{3}\times\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=\sqrt{3}\times\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}$

$=\sqrt{3}\times\sqrt{\dfrac{8}{9}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

よって四面体OABCの体積Vは

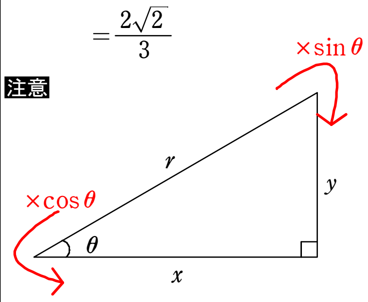
$V=\dfrac{1}{3}\cdot\triangle ABC\cdot OH$

$=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\times AB\times MC\cdot OH$

$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}\times\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

$=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

注意



三角比の定義

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$

$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$

から以下の式が導かれる。

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \quad\cdots\quad ①$$

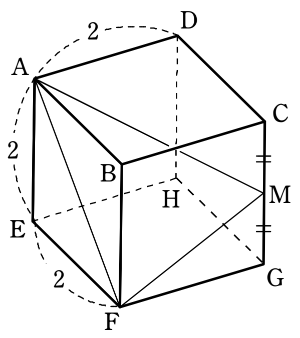
①は物理などでよく使われる式で，

上図のように

「rに$\cos\theta$をかけるとxに，rに$\sin\theta$をかけるとyになる」と覚えよう。

12 立体図形での三角比の利用

1 辺の長さが 2 の立方体 ABCD－EFGH において，
辺 CG の中点を M とする。
(1)　線分 AF，AM，FM の長さを求めよ。
(2)　∠FAM の大きさを求めよ。



解説

(1)　$AF=\sqrt{AE^2+EF^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

同様に　$AC=2\sqrt{2}$

よって　$AM=\sqrt{AC^2+CM^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{9}=3$

また　$FM=\sqrt{FG^2+MG^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

(2)　△AFM において，余弦定理により

$$\cos\angle FAM=\frac{AF^2+AM^2-FM^2}{2AF\cdot AM}=\frac{(2\sqrt{2})^2+3^2-(\sqrt{5})^2}{2\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって　$\angle FAM=45^\circ$

13 三角形の面積

$BC=8$，$CA=3$，$C=60^\circ$ の △ABC について，次のものを求めよ。
(1)　△ABC の面積　　(2)　辺 AB の長さ
(3)　頂点 C から辺 AB またはその延長に下ろした垂線 CH の長さ

解説

(1)　△ ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}BC\cdot CA\sin C=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 3\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$$

(2)　余弦定理により　$AB^2=8^2+3^2-2\cdot 8\cdot 3\cos 60^\circ=49$

$AB>0$ であるから　$AB=\sqrt{49}=7$

(3)　$S=\frac{1}{2}AB\cdot CH$ に，(1) と (2) の結果を代入して　$6\sqrt{3}=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot CH$

したがって　$CH=\frac{12\sqrt{3}}{7}$

14 三角形の内接円

$a=4$，$b=5$，$c=6$ である △ABC について，次のものを求めよ。
(1)　$\cos A$ の値　　(2)　△ABC の面積 S
(3)　外接円の半径 R　　(4)　内接円の半径 r

解説

(1)　余弦定理により　$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{5^2+6^2-4^2}{2\cdot 5\cdot 6}=\frac{3}{4}$

(2)　$\sin A>0$ であるから　$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

よって　$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$

(3)　正弦定理により　$\frac{a}{\sin A}=2R$　　← 外接円の半径ときたら正弦定理

よって　$R=\frac{a}{2\sin A}=4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{7}}=\frac{8\sqrt{7}}{7}$

(4)　$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$ に代入して　　← 内接円の半径は面積から考える

$\frac{15\sqrt{7}}{4}=\frac{1}{2}r(4+5+6)$

よって　$r=\frac{15\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{2}{4+5+6}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

15 角の二等分線

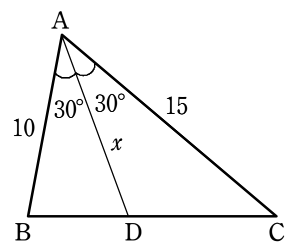
△ABC において，$b=15$，$c=10$，$A=60^\circ$ とする。∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。

解説

$AD=x$ とおく。
$\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ACD$ であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 15\sin 60^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot x\sin 30^\circ+\frac{1}{2}\cdot 15\cdot x\sin 30^\circ$$



よって　$\frac{75\sqrt{3}}{2}=\frac{5}{2}x+\frac{15}{4}x$

これを解くと　$x=6\sqrt{3}$　　したがって　$AD=6\sqrt{3}$

16 円に内接する四角形(2)

円に内接する四角形 ABCD において，$AB=5$，$BC=3$，$CD=2$，$\angle ABC=60^\circ$ であるとき，次のものを求めよ。
(1)　辺 DA の長さ　　(2)　四角形 ABCD の面積 S

解説

(1)　△ABC において，余弦定理により

$AC^2=5^2+3^2-2\cdot 5\cdot 3\cos 60^\circ=19$

ゆえに　$AC=\sqrt{19}$

また，四角形 ABCD は円に内接するから

$\angle ADC=180^\circ-60^\circ=120^\circ$

$DA=x$ とおき，△ACD に余弦定理を用いると

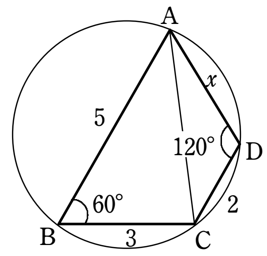
$(\sqrt{19})^2=2^2+x^2-2\cdot 2\cdot x\cos 120^\circ$

よって　$x^2+2x-15=0$

ゆえに　$(x-3)(x+5)=0$

$x>0$ であるから　$x=3$

すなわち　$DA=3$



円に内接する四角形の対角の和は180°

(2)　$S=\triangle ABC+\triangle ACD=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 3\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\sin 120^\circ=\frac{21\sqrt{3}}{4}$

17 円錐に内接する球

底面の半径が 2，母線の長さが 6 である円錐に内接する球の中心を O とする。この球の体積と表面積を求めよ。

解説

この円錐を，円錐の頂点を通り，底面に垂直な平面で切ったときの断面図は，右の図のようになる。

円錐の高さは　$\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$

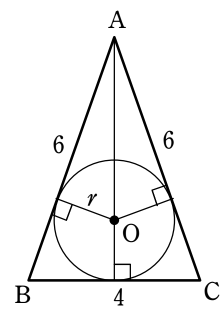
図の △ ABC の面積 S は　$S=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

求める球の半径を r とすると　$S=\frac{1}{2}r(6+6+4)$

すなわち　$8\sqrt{2}=8r$　　したがって　$r=\sqrt{2}$

よって，球 O の体積は　$\frac{4}{3}\pi\cdot(\sqrt{2})^3=\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$，

表面積は　$4\pi\cdot(\sqrt{2})^2=8\pi$



注意

空間図形は平面図形で考える。

半径を求めれば球の体積や表面積は求めるので，断面図から円の半径を求めればよい。