

1 2次関数のグラフ

次の2次関数のグラフをかけ。

(1) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x$

(2) $y = -\frac{1}{3}x^2 - 2x$

(3) $y = (x+2)(x-1)$

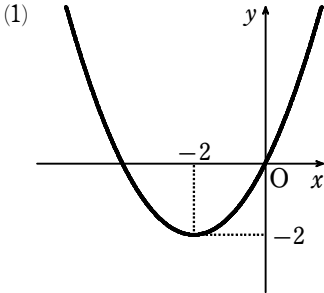
(4) $y = (2x+1)(x-2)$

解説

(1) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x = \frac{1}{2}(x^2 + 4x)$
 $= \frac{1}{2}(x^2 + 2 \cdot 2x + 2^2) - \frac{1}{2} \cdot 2^2$
 $= \frac{1}{2}(x+2)^2 - 2$

グラフは[図]。頂点は 点 $(-2, -2)$

軸は 直線 $x = -2$

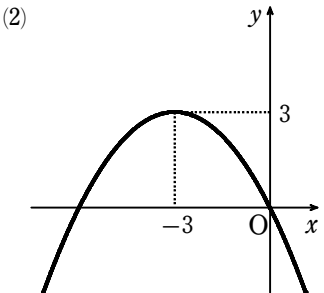


(2) $y = -\frac{1}{3}x^2 - 2x$

$= -\frac{1}{3}(x^2 + 6x)$
 $= -\frac{1}{3}(x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2) + \frac{1}{3} \cdot 3^2$
 $= -\frac{1}{3}(x+3)^2 + 3$

グラフは[図]。頂点は 点 $(-3, 3)$

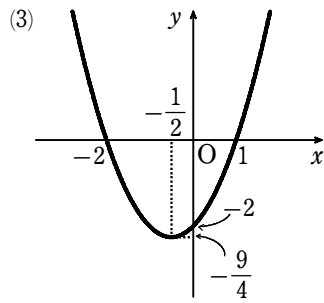
軸は 直線 $x = -3$



(3) $y = (x+2)(x-1) = x^2 + x - 2$
 $= \left\{ x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right\} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2$
 $= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$

グラフは[図]。頂点は 点 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$

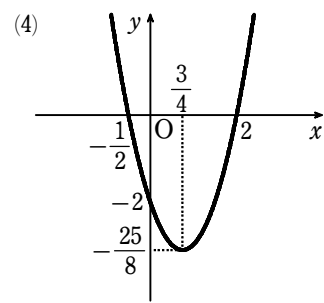
軸は 直線 $x = -\frac{1}{2}$



(4) $y = (2x+1)(x-2) = 2x^2 - 3x - 2$
 $= 2\left\{ x^2 - 2 \cdot \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \right\} - 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 2$
 $= 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{8}$

グラフは[図]。頂点は 点 $\left(\frac{3}{4}, -\frac{25}{8}\right)$

軸は 直線 $x = \frac{3}{4}$



注意

(3),(4)のように $y = a(x-\alpha)(x-\beta)$ と因数分解されている場合,
 $x = \alpha, \beta$ のとき $y = 0$ となるので, $x = \alpha$ と $x = \beta$ で x 軸 (直線 $y = 0$) と交わる。

2 2次関数の平行移動(1)

次の□に適する値を求めよ。

(1) 放物線 $y = x^2 + 2x + 4$ を, x 軸方向に^ア□, y 軸方向に^イ□だけ平行移動
すると, その頂点の座標は $(2, 1)$ となる。

(2) 放物線 $y = x^2 - 3x + 2$ は, 放物線 $y = x^2 + x + 1$ を x 軸方向に^ウ□, y 軸方向に^エ□
だけ平行移動したものである。

解説

(1) $y = x^2 + 2x + 4$ を変形すると $y = (x+1)^2 + 3$
よって, この放物線の頂点の座標は $(-1, 3)$

ゆえに, x 軸方向に $2 - (-1) = \text{ア}$ 3, y 軸方向に $1 - 3 = \text{イ}$ -2 だけ平行移動すると,
その頂点の座標は $(2, 1)$ となる。

別解 点 $(-1, 3)$ を x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動して, 点 $(2, 1)$ になると
すると $-1 + p = 2, \quad 3 + q = 1$
よって $p = \text{ア}$ 3, $q = \text{イ}$ -2

(2) $y = x^2 - 3x + 2 = \left\{ x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right\} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2$
 $= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \quad \dots\dots \text{①} \quad \text{頂点の座標は } \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

$y = x^2 + x + 1 = \left\{ x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right\} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1$

$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \quad \dots\dots \text{②} \quad \text{頂点の座標は } \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$

よって, 放物線①は放物線②を x 軸方向に $\frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \text{ウ}$ 2, y 軸方向に

$-\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = \text{エ}$ -1 だけ平行移動したものである。

3 軸・原点との対称移動

放物線 $y = 3x^2 + x - 7$ を, 次の直線または点について, それぞれ対称移動して得られる
放物線の式を求めよ。

(1) x 軸

(2) y 軸

(3) 原点

解説

$3x^2 + x - 7 = 3\left\{ x^2 + \frac{1}{3}x \right\} - 7 = 3\left\{ x^2 + 2 \cdot \frac{1}{6}x + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \right\} - 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 - 7$
 $= 3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{85}{12}$

ゆえに, 放物線 $y = 3x^2 + x - 7$ の頂点は 点 $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{85}{12}\right)$

(1) 移動後の頂点は 点 $\left(-\frac{1}{6}, \frac{85}{12}\right)$

よって, 求める式は $y = -3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{85}{12}$ すなわち $y = -3x^2 - x + 7$

(2) 移動後の頂点は 点 $\left(\frac{1}{6}, -\frac{85}{12}\right)$

よって, 求める式は $y = 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{85}{12}$ すなわち $y = 3x^2 - x - 7$

(3) 移動後の頂点は 点 $\left(\frac{1}{6}, \frac{85}{12}\right)$

よって, 求める式は $y = -3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{85}{12}$ すなわち $y = -3x^2 + x + 7$

別解 (1) x 軸について対称移動した図形の式は, x, y をそれぞれ $x, -y$ でおき換えた
ものである。よって, 求める式は

$-y = 3x^2 + x - 7$ すなわち $y = -3x^2 - x + 7$

(2) y 軸について対称移動した図形の式は, x, y をそれぞれ $-x, y$ でおき換えたもの
である。よって, 求める式は

$y = 3(-x)^2 + (-x) - 7$ すなわち $y = 3x^2 - x - 7$

(3) 原点について対称移動した図形の式は, x, y をそれぞれ $-x, -y$ でおき換えたもの
である。よって, 求める式は

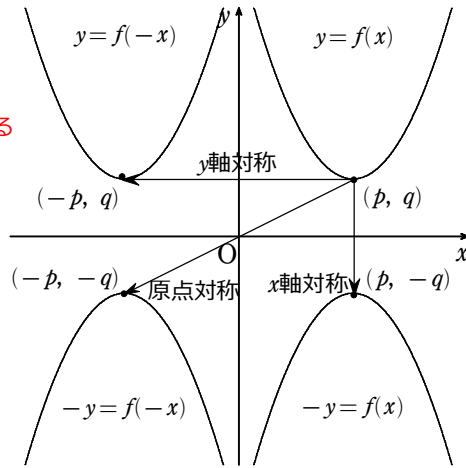
$-y = 3(-x)^2 + (-x) - 7$ すなわち $y = -3x^2 + x + 7$

注意

x 軸対称 $\Rightarrow y$ の符号を逆にする

y 軸対称 $\Rightarrow x$ の符号を逆にする

原点对称 $\Rightarrow x, y$ 両方の符号を逆にする



※これらの性質は2次関数以外の関数(三角関数・指数対数関数など)でも成り立つ。

4 2次関数の平行移動(2)

x 軸方向に -2 , y 軸方向に 1 だけ平行移動すると, 点 $(2, 8)$ を通り, 頂点の座標が $(1, 7)$ となる放物線をグラフとする 2 次関数を求めよ。

解説

求める 2 次関数のグラフの頂点は, 点 $(1, 7)$ を x 軸方向に 2 , y 軸方向に -1 だけ平行移動したものである。その座標は

$$(1+2, 7+(-1)) \quad \text{ゆえに} \quad (3, 6)$$

よって, 求める 2 次関数は $y=a(x-3)^2+6$ とおける。

このグラフが点 $(2+2, 8+(-1))$ すなわち 点 $(4, 7)$ を通るから

$$a+6=7 \quad \text{ゆえに} \quad a=1$$

したがって, 求める 2 次関数は

$$y=(x-3)^2+6 \quad \text{すなわち} \quad y=x^2-6x+15$$

注意

問題文の流れを図示するとわかりやすい。

$$\boxed{\text{求める2次関数}} \Rightarrow \boxed{\text{点(2, 8)を通り, 頂点が(1, 7)の2次関数}}$$

x 軸方向に -2 , y 軸方向に 1 だけ平行移動

本問題ではこの流れを逆にして考える。

$$\boxed{\text{求める2次関数}} \Leftarrow \boxed{\text{点(2, 8)を通り, 頂点が(1, 7)の2次関数}}$$



x 軸方向に 2 , y 軸方向に -1 だけ平行移動

$$\text{頂点}(1+2, 7+(-1))=(3, 6)$$

このことから求める関数を $y=a(x-3)^2+6$ とおくことができる。

$$\text{通る点}(2+2, 8+(-1))=(4, 7)$$

$y=a(x-3)^2+6$ は $(4, 7)$ を通るので代入。

5 条件つき最大・最小

$x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x+y=8$ のとき, xy の最大値と最小値, およびそのときの x , y の値を求めよ。

解説

$$2x+y=8 \text{ から } y=8-2x \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$y \geq 0 \text{ であるから } 8-2x \geq 0 \quad \text{よって} \quad x \leq 4$$

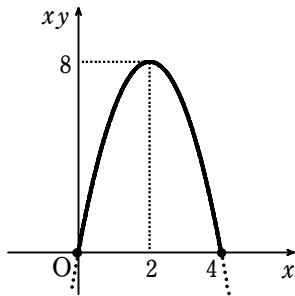
$$x \geq 0 \text{ と合わせて } 0 \leq x \leq 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\begin{aligned} \text{また} \quad xy &= x(8-2x) = -2x^2 + 8x \\ &= -2(x-2)^2 + 8 \end{aligned}$$

② の範囲で xy は $x=2$ で最大, $x=0$, $x=4$ で最小。

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{ から} \quad x=2 \text{ のとき } y &= 4, \\ x=0 \text{ のとき } y &= 8, \\ x=4 \text{ のとき } y &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに} \quad \begin{cases} x=2, y=4 \text{ のとき 最大値 } 8 \\ x=0, y=8 \text{ および } x=4, y=0 \text{ のとき 最小値 } 0 \end{cases}$$



注意

$x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x+y=8$ というように条件がついている最大・最小の問題。

いろいろ条件がついているが, xy の最大値と最小値を求めることを見失わないように。

したがって, $xy =$ の式を変形して xy が縦軸となるようなグラフを書く。

ただし, 条件から x の範囲を求めておくことが重要 (解答の 2・3 行目の下線部) 。

6 最大値・最小値が与えられた問題

関数 $y=ax^2+2ax+b$ ($-2 \leq x \leq 1$) の最大値が 5 , 最小値が -3 であるとき, 定数 a , b の値を求めよ。ただし, $a < 0$ とする。

解説

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + 2ax + b \\ &= a(x+1)^2 - a + b \quad (-2 \leq x \leq 1) \end{aligned}$$

$a < 0$ であるから, 関数のグラフは上に凸である。

また軸は $x=-1$ ということから

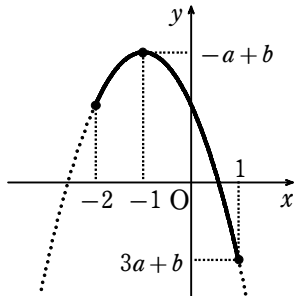
この関数は, $x=-1$ で最大値 $-a+b$, $x=1$ で

最小値 $3a+b$ をとる。

$$\text{条件から} \quad -a+b=5, \quad 3a+b=-3$$

$$\text{これを解いて} \quad a=-2, \quad b=3$$

これは $a < 0$ を満たす。



注意

x^2 の係数が文字のときは通常, 場合分けが必要になるが, 本問題の場合では

$a < 0$ という条件があるので場合分けをする必要はない。

また, 頂点が $(-1, -a+b)$ で軸が $x=-1$ という定数であることに注目すると, グラフは

横には動かないので頂点で最大値をとる。(頂点の y 座標は $-a+b$ なので縦には動く)

頂点の座標に文字が混ざった問題でもグラフを書きながら考えよう。

7 おきかえを用いた最大・最小

関数 $y=(x^2-2x)^2+4(x^2-2x)+1$ の最小値を求めよ。

解説

$$t=x^2-2x \quad \cdots \textcircled{1} \text{ とおくと,}$$

$$t=(x-1)^2-1 \text{ なので, } t \text{ のとりうる値の範囲は}$$

$$t \geq -1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

与式に①を代入すると

$$\begin{aligned} y &= t^2 + 4t + 1 \\ &= (t+2)^2 - 3 \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

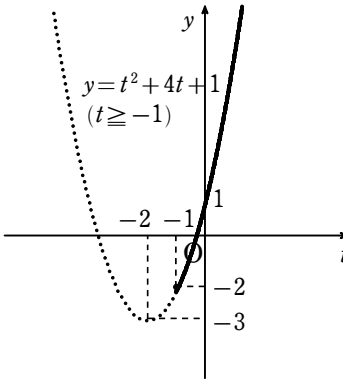
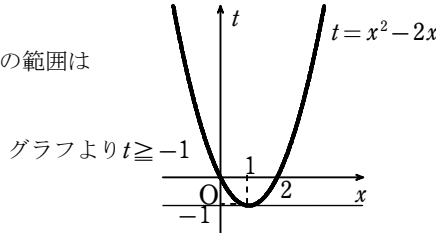
②, ③よりグラフを書く。

y は $t=-1$ のとき最小値をとるから,

$$x^2-2x=-1 \text{ より, } t=-1 \text{ となる } x \text{ の値を求めると,}$$

$$(x-1)^2=0 \quad \text{ゆえに} \quad x=1$$

よって, $x=1$ のとき, 最小値 -2



注意

置き換えたら範囲に注意！

$t=x^2-2x$ とおいたので t の範囲が必要になる。

8 グラフが動くときの最大・最小

2次関数 $y=x^2-2ax+2a$ ($0 \leq x \leq 2$) の最小値を $m(a)$, 最大値を $M(a)$ とする。

(1) 最小値 $m(a)$ を a で表せ。

(2) 最大値 $M(a)$ を a で表せ。

解説

$$f(x)=x^2-2ax+2a \text{ とおくと,}$$

$$f(x)=(x-a)^2-a^2+2a$$

なので $f(x)$ は $x=a$ を軸とする下に凸の放物線である。

(1) (i) $a < 0$ のとき, 図1より

$$f(x) \text{ は } x=0 \text{ のとき最小値をとる。}$$

$$\text{最小値 } m(a)=f(0)=2a$$

(ii) $0 \leq x < 2$ のとき, 図2より

$$f(x) \text{ は } x=a \text{ のとき最小値をとる。}$$

$$\text{最小値 } m(a)=f(a)=a^2-2a \cdot a+2a=-a^2+2a$$

(iii) $2 \leq a$ のとき, 図3より

$$f(x) \text{ は } x=2 \text{ のとき最小値をとる。}$$

$$\text{最小値 } m(a)=f(2)=2^2-4a+2a=4-2a$$

(i),(ii),(iii)より, 求める最小値 $m(a)$ は

$$m(a)=\begin{cases} 2a & (a < 0) \\ -a^2+2a & (0 \leq a < 2) \\ 4-2a & (2 \leq a) \end{cases}$$

(2) (i) $a < 1$ のとき, 図4より

$$f(x) \text{ は } x=2 \text{ のとき最大値をとる。}$$

$$\text{最大値 } M(a)=f(2)=2^2-4a+2a=4-2a$$

(ii) $a=1$ のとき, 図5より

$$f(x) \text{ は } x=0, 2 \text{ のとき最大値をとる。}$$

$$\text{最大値 } M(a)=f(2)=f(0)=2$$

(iii) $1 < a$ のとき, 図6より

$$f(x) \text{ は } x=0 \text{ のとき最大値をとる。}$$

$$\text{最大値 } M(a)=f(0)=2a$$

(i),(ii),(iii)より, 求める最大値 $M(a)$ は

$$M(a)=\begin{cases} 4-2a & (a \leq 1) \\ 2 & (a=1) \\ 2a & (1 < a) \end{cases}$$

図4

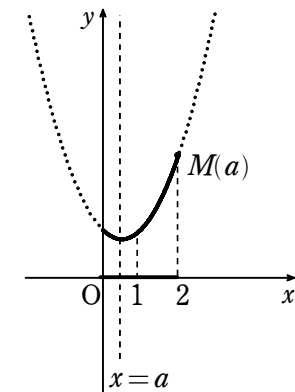


図5

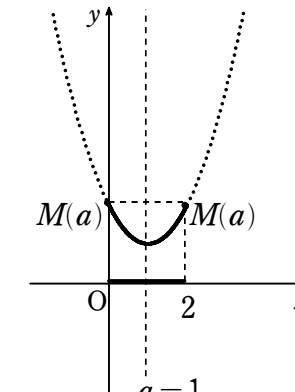
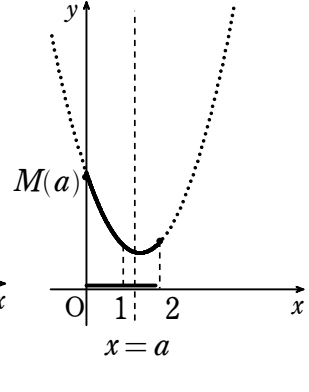


図6



注意

2次関数の場合分けの問題では「グラフが動くのか」「範囲が動くのか」を見極める。

本問題の場合は $y=x^2-2ax+2a$ ($0 \leq x \leq 2$) で関数に文字 a があり, 範囲は定数なの

でグラフが動いて範囲は動かない。軸 $x=a$ の値で最小値や最大値の場所が変わる。

「動かない範囲」を先に図示してからグラフを書いて場合分けを考えると考えやすい。

9 定義域が変化するときの最大・最小

$a \leq x \leq a+1$ における2次関数 $f(x) = x^2 - 2x + 3$ の最大値を $M(a)$ とするとき、 $M(a)$ を求めよ。また $y = M(a)$ のグラフを書け。

解説

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$$

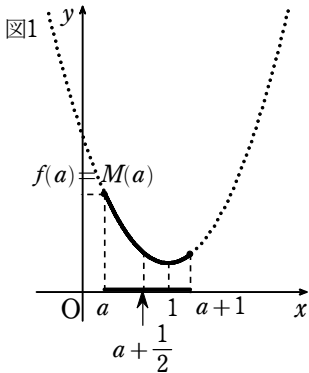
なので、この関数のグラフは $x=1$ を軸とする下に凸の放物線である。

範囲の $a \leq x \leq a+1$ が a の値によって動くので、その中点の $\frac{a+(a+1)}{2} = a + \frac{1}{2}$ と $x=1$ の大小によって場合分けをする。

(i) $a + \frac{1}{2} < 1$ すなわち $a < \frac{1}{2}$ のとき

図1より、 $x=a$ のとき最大値をとる。

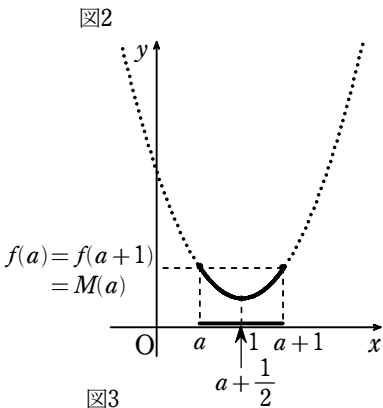
$$\text{最大値 } M(a) = f(a) = a^2 - 2a + 3$$



(ii) $a + \frac{1}{2} = 1$ すなわち $a = \frac{1}{2}$ のとき

図2より、 $x=a, a+1$ のとき最大値をとる。

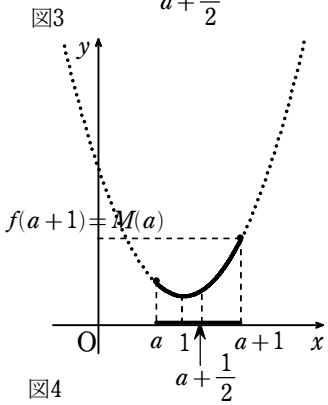
$$\text{最大値 } M(a) = f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$$



(iii) $a + \frac{1}{2} > 1$ すなわち $\frac{1}{2} < a$ のとき

図3より、 $x=a+1$ のとき最大値をとる。

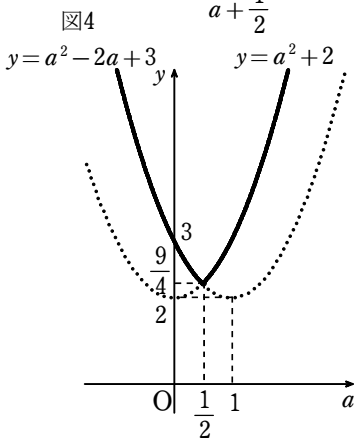
$$\begin{aligned} \text{最大値 } M(a) &= f(a+1) \\ &= (a+1)^2 - 2(a+1) + 3 \\ &= a^2 + 2 \end{aligned}$$



(i),(ii),(iii)より

$$M(a) = \begin{cases} a^2 - 2a + 3 & (a < \frac{1}{2}) \\ \frac{9}{4} & (a = \frac{1}{2}) \\ a^2 + 2 & (a > \frac{1}{2}) \end{cases}$$

グラフは図4



注意

「 $a \leq x \leq a+1$ における2次関数 $f(x) = x^2 - 2x + 3$ の最大値を $M(a)$ 」

というように、範囲に文字の a があ関数には x 以外の文字はないので

「範囲は動く」「グラフは動かない」と考えよう。

「動かないグラフ」を先に書いて、後から「動く範囲」を考えればよい。

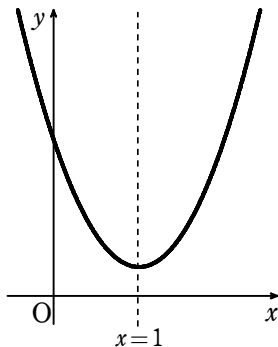
範囲の中点の $a + \frac{1}{2}$ がグラフの軸 $x=1$ より左か右かもしくは $x=1$ かで

最大値が変わるので、以上の3つに場合分けをする。

※本問題のグラフの書き方の手順

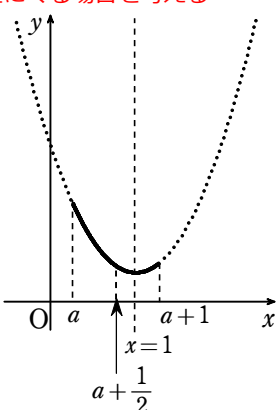
(i) $a + \frac{1}{2} < 1$ の場合

①動かないグラフ $y = x^2 - 2x + 3$ を先に書く



②範囲の中点 $a + \frac{1}{2}$ が軸 $x=1$ よりも

左にくる場合を考える



10 2次関数の決定

グラフが次の条件を満たす2次関数を求めよ。

(1) 直線 $x=1$ を軸とし、2点 $(3, -1)$, $(0, 2)$ を通る。

(2) 3点 $(1, 12)$, $(-1, 4)$, $(-2, 9)$ を通る。

解説

(1) 軸が直線 $x=1$ であるから、求める2次関数は $y = a(x-1)^2 + q$ とおける。

このグラフが2点 $(3, -1)$, $(0, 2)$ を通るから

$$4a + q = -1, \quad a + q = 2 \quad \text{これを解いて } a = -1, \quad q = 3$$

よって、求める2次関数は

$$y = -(x-1)^2 + 3 \quad \text{すなわち} \quad y = -x^2 + 2x + 2$$

(2) 求める2次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とおく。

このグラフが3点 $(1, 12)$, $(-1, 4)$, $(-2, 9)$ を通るから

$$\begin{cases} a + b + c = 12 & \cdots \cdots \text{①} \\ a - b + c = 4 & \cdots \cdots \text{②} \\ 4a - 2b + c = 9 & \cdots \cdots \text{③} \end{cases}$$

$$\text{①} - \text{②} \text{ から } 2b = 8 \quad \text{ゆえに } b = 4$$

$$\text{③} - \text{②} \text{ から } 3a - b = 5 \quad \cdots \cdots \text{④}$$

$$b = 4 \text{ を ④ に代入して } 3a - 4 = 5 \quad \text{ゆえに } a = 3$$

$$a = 3, \quad b = 4 \text{ を ① に代入して } 3 + 4 + c = 12 \quad \text{ゆえに } c = 5$$

$$\text{よって、求める2次関数は } y = 3x^2 + 4x + 5$$

注意

2次関数のおき方には主に以下の3つがある。

$$\text{① } y = ax^2 + bx + c$$

通る3点の座標が与えられているとき。

$$\text{② } y = a(x-p)^2 + q$$

頂点 (p, q) の情報が与えられているとき。

(例：軸が $x=1$ $\Rightarrow y = a(x-1)^2 + q$ とおく)

$$\text{③ } y = a(x-\alpha)(x-\beta)$$

x 軸との交点の x 座標がわかっているとき。

(例： x 軸と $x=2, x=3$ で交わる2次関数 $\Rightarrow y = a(x-2)(x-3)$ とおく)

11 2次関数が x 軸を切り取る線分の長さ

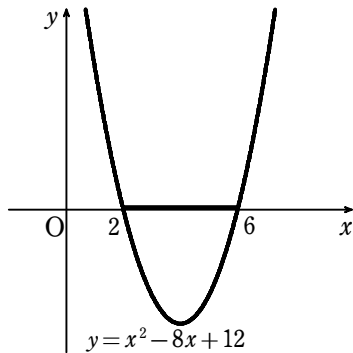
2次関数 $y = x^2 - 8x + 12$ のグラフが x 軸から切り取る線分の長さを求めよ。

解説

グラフと x 軸との共有点の x 座標は $x^2 - 8x + 12 = 0$ の解である。

これを解くと $(x-2)(x-6) = 0$ ゆえに $x = 2, 6$

よって、求める線分の長さは $6 - 2 = 4$



12 2次関数とx軸との関係(判別式)

2 次関数 $y = -x^2 + 3x + k$ のグラフが次の条件を満たすように、定数 k の値、または k の値の範囲を定めよ。また接するときは接点の座標を求めよ。

(1) x 軸と接する。 (2) x 軸と共有点をもたない。

解説

$y = -x^2 + 3x + k$ の係数について $3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot k = 4k + 9$

(1) グラフが x 軸と接するための条件は

$4k + 9 = 0$ よって $k = -\frac{9}{4}$

また接点の x 座標は $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2 \cdot (-1)} = \frac{3}{2}$ なので $(\frac{3}{2}, 0)$

(2) グラフが x 軸と共有点をもたないための条件は

$4k + 9 < 0$ よって $k < -\frac{9}{4}$

注意

【2次方程式での判別式】

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ の $\sqrt{\quad}$ の中身を判別式 $D = b^2 - 4ac$

という。 $D > 0$ 、 $D = 0$ 、 $D < 0$ で解のとり方が変わってくる。

- (i) $D > 0$ なら、解の公式で $\pm \sqrt{\quad}$ の部分が残るので「異なる2つの実数解」をもつ。
- (ii) $D = 0$ なら、解の公式で $\pm \sqrt{\quad}$ の部分が消えるの「解は1つ=重解」をもつ。
- (iii) $D < 0$ なら、解の公式で $\pm \sqrt{\quad}$ の中身が負になるので「解なし」となる。
- (数Ⅱでは虚数 $\sqrt{-1} = i$ があるので $D < 0$ のときは「異なる2つの虚数解をもつ」となる)

【2次関数での判別式】

2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ と x 軸 ($y = 0$) との交点の x 座標

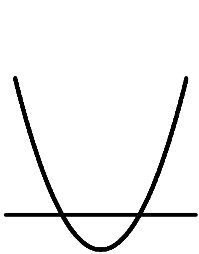
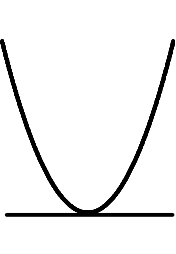
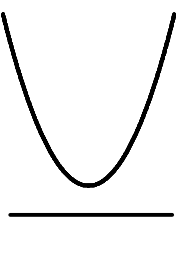
$\Leftrightarrow$ 連立方程式 $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases}$ の解

$\Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0$ の解

つまり 2次方程式の解の個数 = 2次関数のx軸との交点の個数 がいえる。

したがって 2次方程式の解の判別式では解の個数がわかるが、2次関数で判別式を用いるとx軸との交点の数がわかるのだ。

よって、判別式 $D = b^2 - 4ac$ について2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ と2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ で次のことがいえる。

$D = b^2 - 4ac$	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$	異なる2つの実数解	重解	解なし
2次関数 $y = ax^2 + bx + c$			

13 2次関数と直線との関係

放物線 $y = x^2 + 3x + 2$ について

- (1) 放物線と直線 $y = x + 5$ の共有点の座標を求めよ。
- (2) 放物線と直線 $y = x + k$ が接するとき、定数 k の値を求めよ。

解説

(1) $y = x^2 + 3x + 2$ …… ①, $y = x + 5$ …… ②

①, ② から y を消去すると $x^2 + 3x + 2 = x + 5$

整理すると $x^2 + 2x - 3 = 0$ よって $(x - 1)(x + 3) = 0$

ゆえに $x = 1, -3$

② から $x = 1$ のとき $y = 6$, $x = -3$ のとき $y = 2$

したがって、求める共有点の座標は $(1, 6), (-3, 2)$

(2) y を消去すると $x^2 + 3x + 2 = x + k$ すなわち $x^2 + 2x + 2 - k = 0$

両者が接する条件は、この方程式が重解をもつことであるから、判別式 $D = 0$

$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2 - k) = 0$ すなわち $4(k - 1) = 0$

したがって $k = 1$

注意

2つの関数の交点を求めるには連立すればよい。

また、2次関数と1次関数の交点の数は連立した式の解の個数と一致するので、

連立した式で判別式をとると交点の個数を調べることができる。

本問題では放物線と直線が接するときなので「交点は1つ」つまり $D = 0$ とする。

14 2次方程式の重解

2次方程式 $x^2 - (k - 2)x + 9 = 0$ が重解をもつとき、定数 k の値を求めよ。また、1そのときの重解を求めよ。

解説

方程式が重解をもつのは、判別式が $D = 0$ のときなので、

$D = \{-(k - 2)\}^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = (k - 2)^2 - 36 = 0$

したがって $(k - 2)^2 = 36$ より $k - 2 = \pm 6$

よって、 $k = 8, -4$

$k = 8$ のとき、

$x^2 - 6x + 9 = 0$ より $(x - 3)^2 = 0$

ゆえに、 $x = 3$

$k = -4$ のとき、

$x^2 + 6x + 9 = 0$ より $(x + 3)^2 = 0$

ゆえに、 $x = -3$

よって、 $k = 8$ のとき重解3, $k = -4$ のとき重解 -3

15 2次方程式の解の判別

次の条件を満たすように、定数 m の値の範囲を定めよ。

- (1) 2 次方程式 $x^2 + mx + m = 0$ が異なる 2 つの実数の解をもつ。
- (2) 2 次方程式 $x^2 + (m - 1)x + 2m - 1 = 0$ が実数の解をもたない。
- (3) 2 次方程式 $x^2 - mx - m + 8 = 0$ が実数の解をもつ。

解説

この問題は16の2次不等式ができるようになってから解いてください。

(1) この方程式が異なる 2 つの実数の解をもつための条件は、判別式 $D > 0$

$D = m^2 - 4 \cdot 1 \cdot m > 0$ すなわち $m(m - 4) > 0$

よって、求める m の値の範囲は $m < 0, 4 < m$

(2) この方程式が実数の解をもたないための条件は、判別式 $D < 0$

$D = (m - 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2m - 1) < 0$ すなわち $m^2 - 10m + 5 < 0$

$m^2 - 10m + 5 = 0$ を解くと $m = 5 \pm 2\sqrt{5}$

よって、求める m の値の範囲は $5 - 2\sqrt{5} < m < 5 + 2\sqrt{5}$

(3) この方程式が実数の解をもつための条件は、判別式 $D \geq 0$

$D = (-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-m + 8) \geq 0$ すなわち $m^2 + 4m - 32 \geq 0$

ゆえに $(m + 8)(m - 4) \geq 0$

よって、求める m の値の範囲は $m \leq -8, 4 \leq m$

注意

(1) は「異なる2つの実数の解」とあるので $D > 0$

(3) は「実数の解」とあるが $D > 0$ と $D = 0$ を合わせて $D \geq 0$ となる。「異なる」という言葉がついているかついていないかに注意しよう。

16 2次不等式

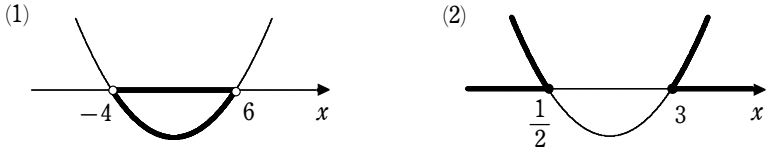
次の2次不等式を解け。

- (1) $x^2 - 2x - 24 < 0$ (2) $2x^2 \geq 7x - 3$ (3) $-2x^2 - 3x + 3 \geq 0$
(4) $-3x^2 < 10 - 6x$ (5) $x^2 < 8(x - 3)$ (6) $2(x^2 + 2) \leq x(x - 4)$

解説

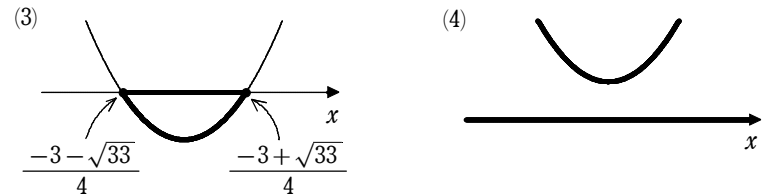
- (1) $x^2 - 2x - 24 < 0$ から $(x + 4)(x - 6) < 0$ よって $-4 < x < 6$
(2) 整理すると $2x^2 - 7x + 3 \geq 0$ ゆえに $(2x - 1)(x - 3) \geq 0$

よって、与えられた不等式の解は $x \leq \frac{1}{2}, 3 \leq x$



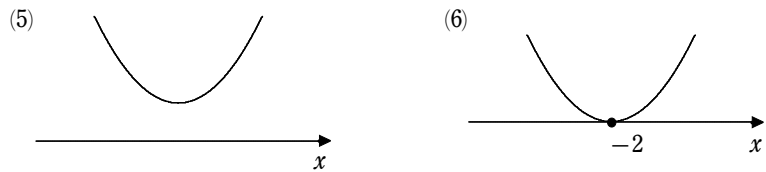
- (3) 両辺に -1 をかけて $2x^2 + 3x - 3 \leq 0$
 $2x^2 + 3x - 3 = 0$ を解くと $x = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{4}$
よって、与えられた不等式の解は $\frac{-3 - \sqrt{33}}{4} \leq x \leq \frac{-3 + \sqrt{33}}{4}$

- (4) 整理すると $-3x^2 + 6x - 10 < 0$
両辺に -1 をかけて $3x^2 - 6x + 10 > 0$
係数について $(-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 10 = -84 < 0$
よって、与えられた不等式の解は すべての実数



- (5) 整理すると $x^2 - 8x + 24 < 0$
係数について $(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24 = -32 < 0$
よって、与えられた不等式の解はない。

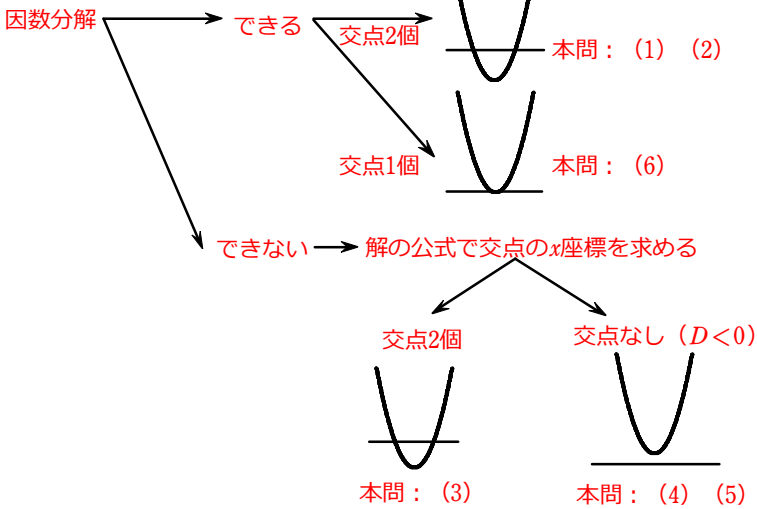
- (6) 整理すると $x^2 + 4x + 4 \leq 0$ ゆえに $(x + 2)^2 \leq 0$
よって、与えられた不等式の解は $x = -2$



注意

2次不等式は必ずグラフを書いて考えよう。

グラフを解く手順をまとめると次のようになる。



17 絶対不等式

次の2次不等式が常に成り立つような定数 m の値の範囲を求めよ。

- (1) $x^2 + (m + 1)x + m^2 - 1 > 0$ (2) $(m - 2)x^2 - (m - 2)x + m + 1 < 0$

解説

- (1) 2次不等式 $x^2 + (m + 1)x + m^2 - 1 > 0$ が常に成り立つのは、2次関数 $y = x^2 + (m + 1)x + m^2 - 1$ のグラフが常に x 軸より上方にあるときである。

その条件は $D < 0$

$$D = (m + 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m^2 - 1) < 0$$

$$\text{すなわち } -3m^2 + 2m + 5 < 0$$

$$\text{ゆえに } (m + 1)(3m - 5) > 0$$

よって、求める m の値の範囲は $m < -1, \frac{5}{3} < m$



- (2) 2次不等式 $(m - 2)x^2 - (m - 2)x + m + 1 < 0$ が常に成り立つのは、2次関数

$y = (m - 2)x^2 - (m - 2)x + m + 1$ のグラフが上に凸で、 x 軸と共有点をもたないときであるから、その条件は

$$m - 2 < 0 \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \text{かつ}$$

$$D = \{-(m - 2)\}^2 - 4 \cdot (m - 2) \cdot (m + 1) < 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ から } m < 2 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

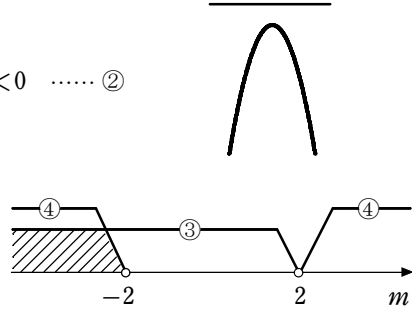
$$\textcircled{2} \text{ から } (m - 2)(-3m - 6) < 0$$

$$\text{ゆえに } 3(m + 2)(m - 2) > 0$$

$$\text{よって } m < -2, 2 < m \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$\textcircled{3}$ と $\textcircled{4}$ の共通範囲を求めて

$$m < -2$$



注意

(2)は x^2 の係数が文字なので上に凸か下に凸かを考えなければならない。

本問題では上に凸かつ判別式 $D < 0$ であれば、すべての x で $y < 0$ となる。

18 絶対値を含む2次関数のグラフ

- (1) $|x^2 - 2x|$ の絶対値記号をはずせ。

- (2) 関数 $y = |x^2 - 2x|$ のグラフをかけ。

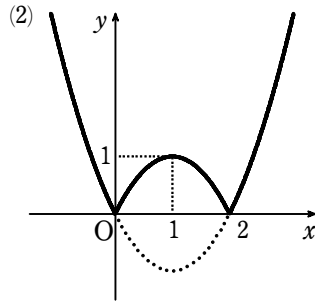
解説

ヒント

$a \geq 0$ のとき $|a| = a$, $a < 0$ のとき $|a| = -a$

- (1) $x^2 - 2x \geq 0$ すなわち $x(x - 2) \geq 0$ の解は $x \leq 0, 2 \leq x$
 $x^2 - 2x < 0$ すなわち $x(x - 2) < 0$ の解は $0 < x < 2$
であるから $x \leq 0, 2 \leq x$ のとき $|x^2 - 2x| = x^2 - 2x$
 $0 < x < 2$ のとき $|x^2 - 2x| = -(x^2 - 2x) = -x^2 + 2x$

- (2) $x \leq 0, 2 \leq x$ のとき $y = x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$
 $0 < x < 2$ のとき $y = -x^2 + 2x = -(x - 1)^2 + 1$
よって、グラフは[図]の実線部分。



19 3つの条件を用いる問題

2次関数 $y = x^2 + 2(a + 3)x + 3 - a$ のグラフが x 軸の負の部分と異なる2点で交わる時、定数 a の値の範囲を求めよ。

解説

$f(x) = x^2 + 2(a + 3)x + 3 - a$ とおく。

2次関数 $y = f(x)$ のグラフは下に凸で、軸は 直線 $x = -a - 3$

このグラフが x 軸の負の部分と異なる2点で交わる

ための条件は

$$\{2(a + 3)\}^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3 - a) > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(0) = 3 - a > 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\text{軸について } -a - 3 < 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

の3つが同時に成り立つことである。

$$\textcircled{1} \text{ から } a^2 + 7a + 6 > 0$$

$$\text{よって } (a + 1)(a + 6) > 0$$

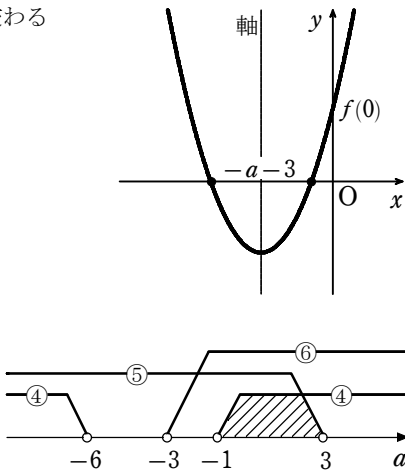
$$\text{ゆえに } a < -6, -1 < a \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{2} \text{ から } a < 3 \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{3} \text{ から } a > -3 \quad \dots\dots \textcircled{6}$$

$\textcircled{4}, \textcircled{5}, \textcircled{6}$ の共通範囲を求めて

$$-1 < a < 3$$



注意

2次関数がある x よりも大きい(小さい)範囲で x 軸と異なる2点で交わる時、

以下のような3つの条件が必要になる。

境界が a のとき(本問題では x 軸の負の部分で交わるから、境界 a は $a = 0$)

①判別式 $D > 0$

②軸について

③ $f(a)$ について

もし、本問題が「 x 軸の正の部分の異なる2点で交わる」という問題なら

① $D > 0$ ②軸 $x = -a - 3 > 0$ ③ $f(0) > 0$ という条件になる。

また、「 x 軸の $x > 3$ で異なる2点で交わる」という問題なら

① $D > 0$ ②軸 $x = -a - 3 > 3$ ③ $f(3) > 0$ という条件になる。

20 共通解

x についての2次方程式 $x^2+2x+k=0$, $x^2+4x+3k=0$ が共通解をもつとき、定数 k の値と共通解を求めよ。

解説

共通解を α とすると、 ⇐ 共通解は α とおこう

$$\begin{cases} \alpha^2+2\alpha+k=0 & \cdots ① \\ \alpha^2+4\alpha+3k=0 & \cdots ② \end{cases}$$

①×3−②より $2\alpha^2+2\alpha=0$ ⇐ k を消去して α を求める

$\alpha(\alpha+1)=0$ より、 $\alpha=0, -1$

$\alpha=0$ のとき、①に代入して $k=0$

$\alpha=-1$ のとき、①に代入して $k=1$

よって、 $k=0$ のとき、共通解は0

$k=1$ のとき、共通解は−1

別解

①−②より $-2\alpha-2k=0$ ゆえに $k=-\alpha$ ⋯③

③を、①、②に代入すると、ともに $\alpha^2+\alpha=0$

$\alpha(\alpha+1)=0$ より $\alpha=0, -1$

よって③より $k=0$ のとき、共通解は0

$k=1$ のとき、共通解は−1

21 文字係数を含んだ2次方程式

x についての方程式 $ax^2+(1-a^2)x-a=0$ を解け。

解説

(i) $a=0$ のとき、 ⇐ x^2 の係数が文字のときは場合分け

$a=0$ を与式に代入すると、 $x=0$

(ii) $a\neq 0$ のとき、

与式は x の2次方程式で、因数分解すると ⇐ 文字が混ざっていても因数分解できる

$(ax+1)(x-a)=0$

したがって $x=-\frac{1}{a}, a$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \times & -a & -a^2 \\ a & & 1 & 1 \\ \hline & & 1-a^2 & \end{array}$$

よって(i), (ii) より、
$$\begin{cases} a=0 \text{ のとき } x=0 \\ a\neq 0 \text{ のとき } x=a, -\frac{1}{a} \end{cases}$$

注意

文字を含んだ2次方程式は因数分解できる場合が案外ある。

ある程度意識しておこう。

さらに、本問題では x^2 の係数に文字がついているので、場合分けも必要。

$a=0$ の場合、与式は1次方程式となる。

ちなみに問題文が「 x についての2次方程式 $ax^2+(1-a)x-a=0$ を解け」だった場合、

$a=0$ のときは考える必要がない。 ($a=0$ のときは1次方程式になるため)

22 場合分けが必要な2次不等式

2次不等式 $x^2-3ax+2a^2>0$ を解け。ただし、 a は定数とする。

解説

$x^2-3ax+2a^2>0$ 左辺を因数分解すると、 $(x-a)(x-2a)>0$

(i) $a>0$ のとき $a<2a$ なので

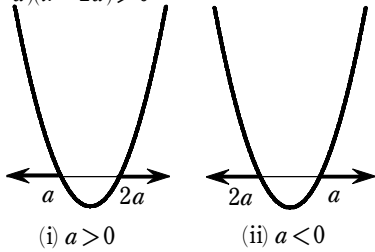
$x<a, 2a<x$

(ii) $a<0$ のとき $a>2a$ なので

$x<2a, a<x$

(iii) $a=0$ のとき 与式は $x^2>0$ となるので

$x=0$ 以外のすべての実数



注意

$(x-a)(x-2a)>0$ と因数分解されたあとに a と $2a$ の大小を考えなければならない。

a が正の数なら $a<2a$ となるが、 a が負の場合は $2a<a$ となる。

例えば、 $a=1$ の場合は $1<2$, $a=-2$ の場合は $-4<-2$ である。

$a=0$ のときも忘れずに場合分けをしよう。

$x^2>0$ では $x\neq 0$ 。

23 2次不等式の整数解

2次不等式 $x^2-(a+2)x+2a<0$ を満たす整数 x がただ1個だけ存在するように定数 a の値の範囲を定めよ。

解説

$x^2-(a+2)x+2a<0$ より

$(x-2)(x-a)<0$ ⇐ まずは因数分解

(i) $a>2$ のとき、 x の範囲は $2<x<a$

この範囲の中の整数が3だけになれば

整数 x はただ1個だけになるので、

$3<a\leq 4$

(ii) $a<2$ のとき、 x の範囲は $a<x<2$

この範囲の中の整数が1だけになれば

整数 x はただ1個だけになるので、

$0\leq a<1$

よって、求める a の値の範囲は

$0\leq a<1$ または $3<a\leq 4$

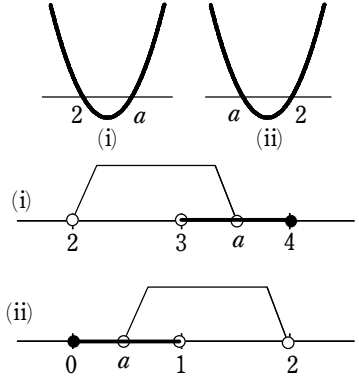
注意

a が2より大きい小さいかで場合分けをする。 (i) では $2<x<a$ となって、これを満たす

整数 x が3だけになるには a が3と4の間を動くことになる。 両端を含むか含まないかは慎重

に考える。 a は○なので3にはなれないが、4にはなることができる。よって $3<a\leq 4$ 。

(ii) も同様に考える。



24 ある区間において成り立つ2次不等式

$1\leq x\leq 2$ において、2次不等式 $x^2-2kx+3>0$ が成り立つとき、定数 k の値の範囲を求めよ。

解説

$f(x)=x^2-2kx+3$ とおくと、

$1\leq x\leq 2$ における $f(x)$ の値が常に正になる条件を考える。

$f(x)=(x-k)^2-k^2+3$ 軸 $x=k$ なので、 k の値で場合分けをする。

以下、グラフで考える。

(i) 軸： $k\leq 1$ のとき

$f(x)$ は $x=1$ で最小値をとるので

$f(1)=1^2-2k\cdot 1+3=4-2k>0$

ゆえに $k<2$

$k\leq 1$ と合わせて $k\leq 1$ ⋯①

(ii) 軸： $1<k<2$ のとき

$f(x)$ は $x=k$ のとき最小値をとるから

$f(k)=-k^2+3>0$

ゆえに $-\sqrt{3}<k<\sqrt{3}$

$1<k<2$ と合わせて $1<k<\sqrt{3}$ ⋯②

(iii) 軸： $k\geq 2$ のとき

$f(x)$ は $x=2$ のとき最小値をとるから

$f(2)=2^2-2k\cdot 2+3=7-4k>0$

ゆえに $k<\frac{7}{4}$ ⋯③

$k\geq 2$ のときだから、③は不適

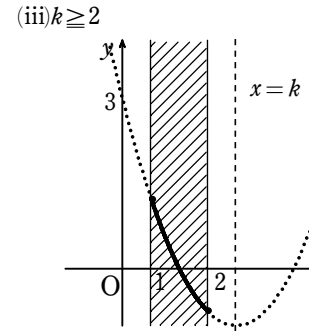
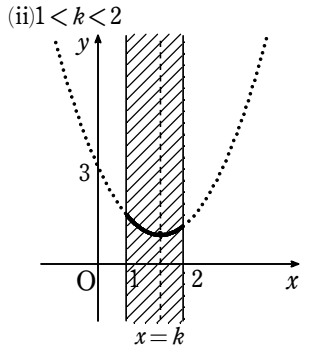
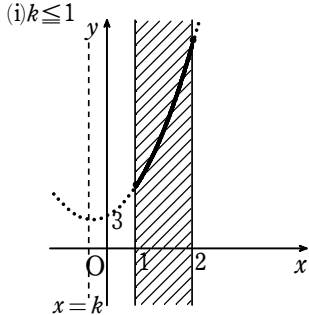
ゆえに、①と②より

$k>\sqrt{3}$

注意

本問題の不等式は $1\leq x\leq 2$ で成り立てばいいので 17 のように $D<0$ の条件だけではいけな

い。 軸の位置で場合分けをして (最小値) >0 となるようにする。



25 2次方程式 → 2次関数のグラフを用いて考える問題

2次方程式 $x^2 - 2kx - k + 2 = 0$ が、次のような異なる2つの実数解をもつとき、定数 k の値の範囲を定めよ。

- (1) 正の解と負の解。
- (2) 2つの解がともに4より小さい。

解説

$f(x) = x^2 - 2kx - k + 2$ とおく

$f(x) = (x - k)^2 - k^2 - k + 2$

- (1) $f(x)$ のグラフは下に凸の放物線なので、
正の解と負の解をもつ条件は

$f(0) < 0$ である。

ゆえに $f(0) = -k + 2 < 0$

よって $k > 2$

- (2) $f(x)$ のグラフが $x < 4$ の範囲で x 軸と異なる

2点で交わればよいので、次の3つの条件が
同時に成り立てばよい。

- (i) x 軸と異なる2点で交わるから、 $D > 0$

$D/4 = (-k)^2 - 1 \cdot (-k + 2)$
 $= (k + 2)(k - 1) > 0$

ゆえに $k < -2, 1 < k \dots \textcircled{1}$

- (ii) 軸 $x = k$ が直線 $x = 4$ より左側にあるので

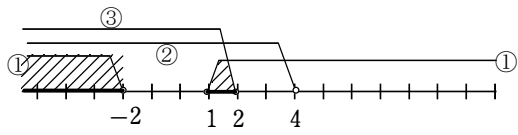
$k < 4 \dots \textcircled{2}$

- (iii) $x = 4$ のときの y の値が正だから、

$f(4) = 4^2 - 2k \cdot 4 - k + 2$
 $= -9k + 18 > 0$

ゆえに $k < 2 \dots \textcircled{3}$

①, ②, ③を同時に満たす k の値の範囲は

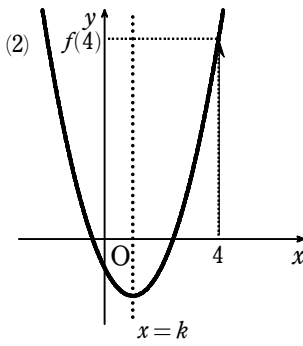
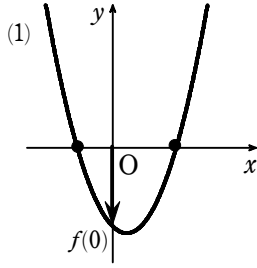


数直線より $k < -2, 1 < k < 2$

注意

(1) は $f(0)$ の値が負であれば、グラフは x 軸の正の部分と負の部分で交わる。

(2) は 19 と同じタイプの問題である。



3つの条件を考える

① $D > 0$

② 軸 $x = k < 4$

③ $f(4) > 0$