1 因数分解(1)

次の式を因数分解せよ。

(1)　$(x+y)^2-x-y-2$　　(2)　$2a^2b-3ab+a-2b-2$

(3)　$x^2+5xy+6y^2-2x-7y-3$　　(4)　$2x^2-3xy+y^2-5x+3y+2$

解説

(1)　$(x+y)^2-x-y-2=(x+y)^2-(x+y)-2$
$=\{(x+y)+1\}\{(x+y)-2\}$
$=(x+y+1)(x+y-2)$

(2)　$2a^2b-3ab+a-2b-2=(2a^2-3a-2)b+a-2$
$=(a-2)(2a+1)b+(a-2)$
$=(a-2)\{(2a+1)b+1\}$
$=(a-2)(2ab+b+1)$

(3)　$x^2+5xy+6y^2-2x-7y-3$
$=x^2+(5y-2)x+(6y^2-7y-3)$
$=x^2+(5y-2)x+(2y-3)(3y+1)$
$=\{x+(2y-3)\}\{x+(3y+1)\}$
$=(x+2y-3)(x+3y+1)$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & 2y-3 & \longrightarrow & 2y-3 \\ 1 & & 3y+1 & \longrightarrow & 3y+1 \\ \hline 1 & & (2y-3)(3y+1) & & 5y-2 \end{array}$$

(4)　$2x^2-3xy+y^2-5x+3y+2$
$=2x^2+(-3y-5)x+(y^2+3y+2)$
$=2x^2+(-3y-5)x+(y+1)(y+2)$
$=\{x-(y+2)\}\{2x-(y+1)\}$
$=(x-y-2)(2x-y-1)$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & -(y+2) & \longrightarrow & -2y-4 \\ 2 & & -(y+1) & \longrightarrow & -y-1 \\ \hline 2 & & (y+1)(y+2) & & -3y-5 \end{array}$$

別解　$2x^2-3xy+y^2-5x+3y+2$
$=y^2+(-3x+3)y+2x^2-5x+2$
$=y^2+(-3x+3)y+(x-2)(2x-1)$
$=\{y-(x-2)\}\{y-(2x-1)\}$
$=(y-x+2)(y-2x+1)$
$=(x-y-2)(2x-y-1)$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & -(x-2) & \longrightarrow & -x+2 \\ 1 & & -(2x-1) & \longrightarrow & -2x+1 \\ \hline 1 & & (x-2)(2x-1) & & -3x+3 \end{array}$$

2 因数分解(2)

次の式を因数分解せよ。

(1)　$ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$　　(2)　x^3+4x^2+8x+8

(3)　$27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3$

解説

(1)　(与式)$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)$
$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$
$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$
$=(b-c)(a-b)(a-c)$
$=-(a-b)(b-c)(c-a)$

(2)　(与式)$=(x^3+8)+(4x^2+8x)$
$=(x+2)(x^2-2x+4)+4x(x+2)$
$=(x+2)(x^2-2x+4+4x)$
$=(x+2)(x^2+2x+4)$

(3)　(与式)$=(27a^3-8b^3)-(54a^2b-36ab^2)$
$=(3a-2b)(9a^2+6ab+4b^2)-18ab(3a-2b)$
$=(3a-2b)(9a^2+6ab+4b^2-18ab)$
$=(3a-2b)(9a^2-12ab+4b^2)$
$=(3a-2b)(3a-2b)^2$
$=(3a-2b)^3$

別解　(与式)$=(3a)^3-3\cdot(3a)^2\cdot 2b+3\cdot 3a\cdot(2b)^2-(2b)^3=(3a-2b)^3$

3 複2次式の因数分解

次の式を因数分解せよ。

(1)　x^4+3x^2-4　　(2)　x^4-7x^2+1

解説

xの次数が偶数の式を複2次式といいます。

複2次式には主に以下の2つの解法があります。

① $x^2=A$と置き換えて考える　→　(1)

② $x^2=A$と置き換えてもうまくいかないときは，A^2-B^2の形を強引に作る　→　(2)

(2)はx^4-7x^2+1で，$\boxed{x^4}-7x^2+\boxed{1}$に注目すると，$2x^2$があれば(　　)^{2}を作れることに気づきます。あとは元に戻るように$-2x^2$をつけておけば，$-9x^2$ができて2乗ひく2乗の形になります。

(1)　$x^4+3x^2-4=(x^2)^2+3x^2-4$
$=(x^2-1)(x^2+4)$
$=(x+1)(x-1)(x^2+4)$

(2)　$x^4-7x^2+1=(x^4+1)-7x^2$
$=(x^4+2x^2+1)-2x^2-7x^2$
$=(x^2+1)^2-9x^2$
$=\{(x^2+1)+3x\}\{(x^2+1)-3x\}$
$=(x^2+3x+1)(x^2-3x+1)$

4 二重根号

$a>0$，$b>0$ のとき　　$\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

$a>b>0$　　のとき　　$\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$

が成り立つ。このことを利用して，次の式を簡単にせよ。

(1)　$\sqrt{7+2\sqrt{12}}$　　(2)　$\sqrt{8+\sqrt{60}}$　　(3)　$\sqrt{15-6\sqrt{6}}$

解説

(1)　$\sqrt{7+2\sqrt{12}}=\sqrt{(4+3)+2\sqrt{4\cdot 3}}=\sqrt{4}+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}$

(2)　$\sqrt{8+\sqrt{60}}=\sqrt{8+2\sqrt{15}}=\sqrt{(5+3)+2\sqrt{5\cdot 3}}=\sqrt{5}+\sqrt{3}$

(3)　$\sqrt{15-6\sqrt{6}}=\sqrt{15-2\sqrt{54}}=\sqrt{(9+6)-2\sqrt{9\cdot 6}}=\sqrt{9}-\sqrt{6}=3-\sqrt{6}$

5 不等式の文章題

10 % の食塩水が 1360 g ある。これに食塩を加えて 15 % 以上 20 %以下の食塩水を作りたい。加える食塩の量の範囲を求めよ。

解説

加える食塩の量を x g とすると

$(1360+x)\times 0.15\leqq 1360\times 0.1+x\leqq(1360+x)\times 0.20$

各辺に 100 をかけて　　$15(1360+x)\leqq 13600+100x\leqq 20(1360+x)$

$15(1360+x)\leqq 13600+100x$ から　　$20400+15x\leqq 13600+100x$

整理すると　　$-85x\leqq -6800$

よって　　$x\geqq 80$　……①

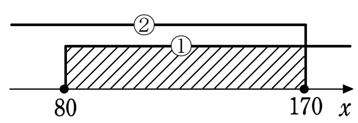
$13600+100x\leqq 20(1360+x)$ から　　$13600+100x\leqq 27200+20x$

整理すると　　$80x\leqq 13600$

よって　　$x\leqq 170$　……②

① と ② の共通範囲を求めて

$80\leqq x\leqq 170$



したがって，加える食塩の量の範囲は，

80 g 以上 170 g 以下である。

6 絶対値を含む方程式・不等式(1)

次の方程式，不等式を解け。

(1)　$|3x-2|=1$　　(2)　$|2x+5|<3$　　(3)　$|3-4x|\geqq 5$

解説

(1)　$|3x-2|=1$ から　　$3x-2=1$ または $3x-2=-1$

$3x-2=1$ から　$x=1$，　$3x-2=-1$ から　$x=\dfrac{1}{3}$

したがって　　$x=1,\ \dfrac{1}{3}$

(2)　$|2x+5|<3$ から　　$-3<2x+5<3$　　よって　$-4<x<-1$

(3)　$|3-4x|\geqq 5$ から　　$3-4x\leqq -5$ または $5\leqq 3-4x$

ゆえに　$-4x\leqq -8$ または $4x\leqq -2$　　よって　　$x\geqq 2,\ x\leqq -\dfrac{1}{2}$

すなわち　　$x\leqq -\dfrac{1}{2},\ 2\leqq x$

7 絶対値を含む方程式・不等式(2)

次の方程式，不等式を解け。

(1)　$|x+3|=2x$　　　(2)　$|x+3|<2x$

解説

(1)　[1]　$x+3\geqq 0$　すなわち　$x\geqq -3$ のとき

方程式は　　$x+3=2x$

これを解いて　　$x=3$　　　$x=3$ は $x\geqq -3$ を満たす。

[2]　$x+3<0$　すなわち　$x<-3$ のとき

方程式は　　$-(x+3)=2x$

これを解いて　　$x=-1$　　　$x=-1$ は $x<-3$ を満たさない。

したがって，求める x の値は　　$x=3$

(2)　[1]　$x+3\geqq 0$　すなわち　$x\geqq -3$ のとき

不等式は　　$x+3<2x$

これを解いて　　$x>3$

$x>3$ と $x\geqq -3$ との共通範囲は　　$x>3$

[2]　$x+3<0$　すなわち　$x<-3$ のとき

不等式は　　$-(x+3)<2x$

これを解いて　　$x>-1$

$x>-1$ と $x<-3$ との共通範囲はない。

したがって，求める x の値の範囲は，[1] または [2] から　　$x>3$

8 連立不等式の整数解

連立方程式　$\begin{cases} 4x+1\geqq 2(x+2) & \cdots① \\ 3x-4\leqq 3a+2 & \cdots② \end{cases}$　について

(1)　xが10未満の自然数のとき，①を満たすxの個数を求めよ。

(2)　xが整数のとき，上の連立不等式を満たすxがちょうど3個あるように，定数aの値の範囲を定めよ。

解説

不等式の整数問題は数直線を使って考えよう

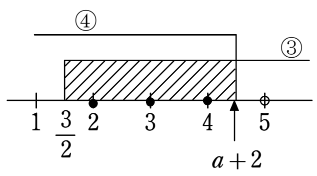
③と④を同時に満たす整数xがちょうど3個になるには，$a+2$が4と5の間にあることは大体わかります。ただし，その両端の点，ここでは4と5を含むのか含まないのかは慎重に考えましょう。

(1)　①より　$4x+1\geqq 2x+4$　，これを解くと$x\geqq \dfrac{3}{2}$　…③

これを満たす10満たす自然数xの個数は，2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 の8個。

(2)　②より$3x\leqq 3a+6$　よって$x\leqq a+2$　…④

③と④で整数がちょうど3個になるaの値の範囲を考える。



図より $4\leqq a+2<5$　よって，$2\leqq a<3$

9 文字係数を含む1次方程式・1次不等式

aを実数とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　方程式 $ax-1=x$ を解け。

(2)　不等式 $ax-1<x$ を解け。

解説

(分母)＝0は危険！

文字が混じる方程式・不等式は分母が0になる可能性があるので，安易に割り算ができない。

分母が0になるときは場合分けをして別に解を考える必要がある。

(2)では(1)と同じように考えるが，(1)のように$a=1$のときは解なしとしないように。また，$a\fallingdotseq 1$のときは不等式では$a>1$と$a<1$でさらに場合分けをしなければならない。

(1)　$ax-1=x$

$(a-1)x=1$ …①

(i)$a=1$のとき

①は$0=1$で成り立たない。　　$\Leftarrow$ $0\cdot x=1$ となるから

ゆえに解なし。

(ii)$a\fallingdotseq 1$のとき

①の両辺を$a-1$で割ると$x=\dfrac{1}{a-1}$　　$\Leftarrow$ $a\fallingdotseq 1$なら分母が0にならない

以上より　$\begin{cases} a=1 \text{ のとき，解なし} \\ a\fallingdotseq 1 \text{ のとき，} x=\dfrac{1}{a-1} \end{cases}$

(2)　$ax-1<x$

$(a-1)x<1$ …②

(i) $a=1$のとき

②は$0<1$となって，どのようなxでも②は成り立つ。

ゆえに，xはすべての実数。

(ii)$a-1>0$ つまり$a>1$のとき

②の両辺を$a-1$で割ると　　$\Leftarrow$　$a-1>0$ なので不等号の向きは変わらない

$x<\dfrac{1}{a-1}$

(iii)$a-1<0$ つまり$a<1$のとき

②の両辺を$a-1$で割ると　　$\Leftarrow$　$a-1<0$ なので不等号の向きは変わる

$x>\dfrac{1}{a-1}$

以上より，$\begin{cases} a=1 \text{ のとき，} x \text{はすべての実数} \\ a>1 \text{ のとき，} x<\dfrac{1}{a-1} \\ a<1 \text{ のとき，} x>\dfrac{1}{a-1} \end{cases}$

10 複数の絶対値を含む方程式，不等式

次の方程式，不等式を解け。

(1)　$|x+3|+|x-4|=9$　…①　　　(2)　$|x+2|+|x-3|<7$　…②

解説

絶対値の場合わけ　⇒　中身が0になる値で範囲を分ける

複数の絶対値を含む方程式や不等式では場合分けが必要です。

絶対値の場合分けは中身が正なのか負なのかで分けます。

$|x|=\begin{cases} x & (x\geqq 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$　が基本ですが，

$|x+a|$は$\begin{cases} x+a\text{が正（絶対値の中身が正）} \Longrightarrow x+a\text{（絶対値をとるだけ）} \\ x+a\text{が負（絶対値の中身が負）} \Longrightarrow -(x+a)\text{（中身に}-\text{をかける）} \end{cases}$

と考えてください。

また、数直線を利用すると理解しやすくなります。

3つに場合分けされることがわかります。

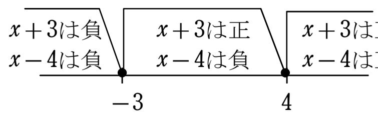
場合分けの不等号についている＝は，範囲のどこかについていればOKです。

例えば(1)では，(i)$x<-3$，(ii)$-3\leqq x\leqq 4$，(iii)$x>4$　と場合分けしてもよい。

わからない人は全ての範囲に＝をつけてもかまわない。

（正解にはなるが数学的には美しくない）

(1)　(i) $x<-3$のとき



$|x+3|=-(x+3)$, $|x-4|=-(x-4)$なので，

①は　$-x-3-x+4=9$，$-2x=8$

よって$x=-4$（これは条件の$x<-3$を満たす）

(ii) $-3\leqq x<4$のとき

$|x+3|=x+3$, $|x-4|=-(x-4)$なので，

①は　$x+3-x+4=9$

$7=9$　となって不適。

(iii) $x\geqq 4$のとき

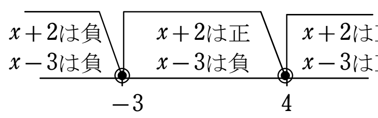
$|x+3|=x+3$, $|x-4|=x-4$なので，

①は　$x+3+x-4=9$, $2x=10$

よって$x=5$（これは条件の$x\geqq 4$を満たす）

(i), (ii), (iii) より，$x=-4, 5$

(2)　(i) $x<-2$のとき



$|x+2|=-(x+2)$, $|x-3|=-(x-3)$なので，

②は$-x-2-x+3<7$，$-2x<6$

よって$x>-3$

条件の$x<-2$と合わせて$-3<x<-2$　…③

(ii) $-2\leqq x<3$のとき

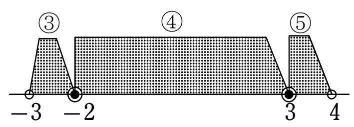
$|x+2|=x+2$, $|x-3|=-(x-3)$なので，

②は　$x+2-x+3<7$

$5<7$となって，xがどんな値でも成り立つ。

よって　条件の$-2\leqq x<3$　…④　が解となる。

(iii) $x\geqq 3$のとき



$|x+2|=x+2$, $|x-3|=x-3$なので，

②は　$x+2+x-3<7$, $2x<8$

よって$x<4$

条件の$x\geqq 3$ と合わせて　$3\leqq x<4$　…⑤

(i), (ii), (iii)より，③，④，⑤をあわせて，$-3<x<4$