1 さいころと確率

次の確率をそれぞれ求めよ。

(1)　2個のさいころを振って，出た目の数の和が9以上である確率

(2)　2個のさいころを振って，出た目の積の一の位の数が5である確率

解説

(1) 2個のさいころをA，Bとすると，出た目の和は以下の表のようになる。

B\A	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

すべての場合は　$6\times6=36$(通り)

目の和が9以上の場合は表より　10(通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{10}{36}=\dfrac{5}{18}$

(2)　出た目の積は以下の表のようになる。

B\A	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

すべての場合は　$6\times6=36$(通り)

出た目の積の一の位の数が5になるのは表より　5(通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{5}{36}$

2 文字の並べかえと確率

a，A，b，B，c，Cがある。

(1)　一列に並べたとき，小文字と大文字が交互に並ぶ確率を求めよ。

(2)　円形に並べたとき，どの小文字と大文字のペア(a，Aなど)も隣り合う確率を求めよ。

解説

(1)　文字の並べ方は　$6!$(通り)

小文字と大文字が交互に並ぶ並べ方は，小文字で始まるものと，大文字で始まるものとがあることに注意して　$3!\times3!\times2$(通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{3!3!\cdot2}{6!}=\dfrac{1}{10}$

(2)　文字の並べ方の総数は　$(6-1)!=5!$(通り)

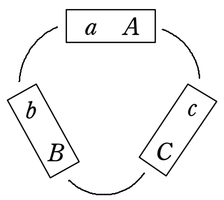
どの小文字と大文字のペアも隣り合う並べ方を求める。

3ペアの並べ方は　$(3-1)!=2!$(通り)　であるが

ペア内で入れ替えた場合それぞれ2通りずつあるので

求める並べ方は　$2!\times2^3$(通り)となる。

よって，求める確率は　$\dfrac{2!\times2^3}{5!}=\dfrac{2}{15}$



3 球を取り出す確率

袋の中に2個の赤球と，3個の青球と，4個の白球が入っている。袋の中の球をよくかき混ぜて，3個の球を取り出す。

(1)　球が全て白球である確率を求めよ。

(2)　球の色が少なくとも2種類である確率を求めよ。

(3)　球の色が3種類である確率を求めよ。

解説

(1)　すべての場合の数は，${}_9C_3=84$(通り)

球がすべて白球であるのは，白球4個から3個を取り出すときで　${}_4C_3=4$(通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{4}{84}=\dfrac{1}{21}$

(2)　まず，「球の色が1種類だけである」確率を求める。

これは青球3個取り出す場合か，白球3個取り出す場合のどちらか。

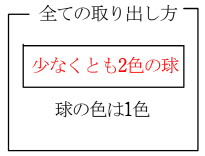
取り出した球の色が青のみである確率は

$\dfrac{{}_3C_3}{84}=\dfrac{1}{84}$

取り出した球の色が白のみである確率は(1)より　$\dfrac{1}{21}$

よって，球の色が1種類だけである確率は　$\dfrac{1}{84}+\dfrac{4}{84}$

ゆえに，求める確率は　$1-\left(\dfrac{1}{84}+\dfrac{4}{84}\right)=1-\dfrac{5}{84}=\dfrac{79}{84}$



(3)　球の色が3種類であるのは，赤，青，白の1つずつ取り出す場合で，

その確率は，　$\dfrac{{}_2C_1\times{}_3C_1\times{}_4C_1}{84}=\dfrac{2}{7}$

4 加法定理

さいころを2個同時に投げるとき，出た目の積について次の確率を求めよ。

(1)　2の倍数となる確率

(2)　3の倍数となる確率

(3)　2の倍数，または3の倍数となる確率

解説

(1)　出た目の数の積が2の倍数である事象をAとする。表から求める確率は

$P(A)=\dfrac{27}{36}=\dfrac{3}{4}$

B\A	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

(2)　出た目の数の積が3の倍数である事象をBとする。表から求める確率は

$P(B)=\dfrac{20}{36}=\dfrac{5}{9}$

B\A	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	18
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

(3)　出た目の数の積が6の倍数である事象$A\cap B$の確率は表より，

$P(A\cap B)=\dfrac{15}{36}=\dfrac{5}{12}$

よって

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{9}-\dfrac{5}{12}$

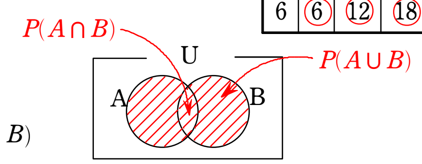
$=\dfrac{8}{9}$

B\A	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

注意

加法定理

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$



5 排反事象の加法定理

白球6個と赤球4個が入っている袋から，よくかき混ぜて，球を3個取り出すとき，白球が２個以上出る確率を求めよ。

解説

起こりうる場合の数は　${}_{10}C_3=120$(通り)

白球が2個以上出るのは

A:白球が2個，赤球が1個

B:白球が3個

の2通りがある。

事象Aの起こる場合の数は，${}_6C_2\times{}_4C_1=60$(通り)

事象Bの起こる場合の数は，${}_6C_3=20$(通り)

よって，$P(A)=\dfrac{60}{120}$，$P(B)=\dfrac{20}{120}$

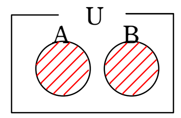
事象A，Bは排反であるから，求める確率$P(A\cup B)$は，

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\dfrac{60}{120}+\dfrac{20}{120}=\dfrac{2}{3}$

注意

「事象AとBが同時に起こることが決してない」とき，事象A，Bは互いに排反（または排反事象）であるという。2つの事象が排反な場合，$P(A\cap B)=P(\varnothing)=0$なので，

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$　が成り立つ。



6 余事象の確率

赤，白，青の同形のカードが，それぞれ2枚ずつ合計6枚ある。これを3人に2枚ずつ配るとき，次の確率を求めよ。

(1)　3人とも各人受け取った2枚の色が同じである確率。

(2)　3人とも各人受け取った2枚の色が異なっている確率

解説

(1)　赤，白，青のカードをそれぞれ，R_1，R_2，W_1，W_2，B_1，B_2とすると，

6枚を3人に2枚ずつ配る配り方は　${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2=90$(通り)

3人とも各人受け取った2枚の色が同じである場合は，$(R_1,\ R_2)$，$(W_1,\ W_2)$，$(B_1,\ B_2)$で

3人への並び替えを考えて，　$3!$(通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{3!}{90}=\dfrac{1}{15}$

(2)　3人のカードの受け取り方は

3人とも同じ色
1人だけが同じ色　　←2人だけが同じ色という場合はない
3人とも異なる色

のどれかである。

(1)より，3人とも同じ色である確率は$\dfrac{1}{15}$であった。

また，1人だけが同じ色になる場合の数は誰が何色で同色になるかを考えて，

$3\times3=9$(通り)　←【同色になる人の選び方】×【何色で同色になるかの選び方】

その各々に対して残りの2人の色の組は4通り。

よって，1人が同色，2人が異なる色となる場合は

$9\times4=36$(通り)

ゆえに，3人とも各人受け取った2枚の色が異なっている確率は

$1-\dfrac{3!}{90}-\dfrac{36}{90}=\dfrac{8}{15}$　←余事象の利用

例えば，1人が青2枚のとき，以下の4通り

$(B_1,\ B_2)$ — $(R_1,\ W_1)$ — $(R_2,\ W_2)$
$(R_1,\ W_2)$ — $(R_2,\ W_1)$
$(R_2,\ W_1)$ — $(R_1,\ W_2)$
$(R_2,\ W_2)$ — $(R_1,\ W_1)$

7 さいころの目の最大値と確率

1つのさいころをくり返し3回投げるとき，次の確率を求めよ。

(1)　3回とも3以下の目が出る確率

(2)　出る目の最大値が3である確率

解説

(1)　さいころを1回投げて，3以下の目が出る確率は，$\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

　よって，3回とも3以下の目が出る確率は　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$

(2)　出る目の最大値3となる事象をA

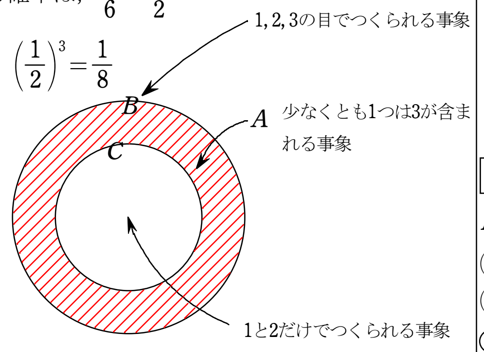
　3回とも3以下の目である事象をB

　3回とも2以下の目である事象をC

　とすると，(1)より，$P(B)=\dfrac{1}{8}$

　また，$P(C)=\left(\dfrac{2}{6}\right)^3=\dfrac{1}{27}$

　よって，$P(A)=P(B)-P(C)=\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{27}=\dfrac{19}{216}$



8 独立試行の確率

白球7個と赤球3個入っている袋から，球を1個取り出し，これを元に戻してから，もう1度球を1個取り出すとき，取り出した2個の球の色が異なる確率を求めよ。

解説

1回目に球を取り出す試行T_1と，2回目に球を取り出す試行T_2は独立である。

取り出した2個の球の色が異なるには

　A:T_1では白球，T_2では赤球が出る

　B:T_1では赤球，T_2では白球が出る

といった2つの場合があり，これらは互いに排反である。

事象A，Bの起こる確率はそれぞれ，

$$P(A)=\frac{7}{10}\times\frac{3}{10}=\frac{21}{100},\quad P(B)=\frac{3}{10}\times\frac{7}{10}=\frac{21}{100}$$

よって，求める確率$P(A\cup B)$は

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{21}{100}+\frac{21}{100}=\frac{42}{100}=\frac{21}{50}$$　←排反事象の加法定理

注意

一方の結果が他方と無関係な試行を「独立試行」という。

T_1とT_2が独立で，T_1で事象Aが起こり，T_2で事象Bが起こる確率は

　$P(A)\times P(B)$

9 反復試行の確率

白球4個，赤球2個が入った袋から1個取り出して袋に戻す。これを5回繰り返すとき，5回目に2度目の赤球がでる確率を求めよ。

解説

1回の試行で「赤球が出る」という事象をAとすると，

　Aが起こる確率　…$P(A)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

　Aが起こらない確率　…$P(\overline{A})=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$

5回の反復試行の中で5回目に2度目の赤球が出るのは，4回目までに赤球が1回だけ出ていて，5回目に2度目の赤球がでるということである。

よって，求める確率は，　${}_4C_1\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{32}{243}$

注意

赤が出る事象Aを○，赤が出ない事象$\overline{A}$を×で表すと下の表のようになる。

1	2	3	4	5
○	×	×	×	○
×	○	×	×	○
×	×	○	×	○
×	×	×	○	○

${}_4C_1$通り　　どの場合も$\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\left(\dfrac{1}{3}\right)$通り

　よって，求める確率は　${}_4C_1\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\left(\dfrac{1}{3}\right)$通り

10 じゃんけん

A，B2人で1回じゃんけんをする。

(1)　Aが勝つ確率，Bが勝つ確率を求めよ。

(2)　引き分ける確率を求めよ。

解説

(1)　Aが勝つ確率を求める。

　2人の出す手を，（Aの出した手，Bの出した手）と表す。

　2人で1回じゃんけんするときの手の出し方は，各々グー，チョキ，パーの3通りで，

　$3\times3=9$(通り)

　Aが勝つのは（グ，チ）（チ，パ）（パ，グ）の3通りだから，

　Aが勝つ確率は，　$\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$

　同様に，Bが勝つ確率は，　$\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$

(2)　(1)より，引き分ける確率は，

$$1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

11 期待値

2つのさいころを同時に投げるとき，次の問いに答えよ。

(1)　出る目の最大値が4である確率を求めよ。

(2)　出る目の最大値の期待値を求めよ。

解説

(1)　最大値が4以下となるのは，2つとも4以下の目が出る場合で，

　最大値が3以下となるのは，2つとも3以下の目が出る場合だから

　最大値が4となる確率は

$$\left(\frac{4}{6}\right)^2-\left(\frac{3}{6}\right)^2=\frac{7}{36}$$　となる。

(2)　出る目の最大値が1のときは2つとも1のときで，その確率は　$\dfrac{1}{36}$

　出る目の最大値が2のときの確率は　$\left(\dfrac{2}{6}\right)^2-\left(\dfrac{1}{6}\right)^2=\dfrac{3}{36}$

　出る目の最大値が3のときの確率は　$\left(\dfrac{3}{6}\right)^2-\left(\dfrac{2}{6}\right)^2=\dfrac{5}{36}$

　出る目の最大値が5のときの確率は　$\left(\dfrac{5}{6}\right)^2-\left(\dfrac{4}{6}\right)^2=\dfrac{9}{36}$

　出る目の最大値が6のときの確率は　$\left(\dfrac{6}{6}\right)^2-\left(\dfrac{5}{6}\right)^2=\dfrac{11}{36}$

　よって出る目の最大値の期待値は

$$E=1\times\frac{1}{36}+2\times\frac{3}{36}+3\times\frac{5}{36}+4\times\frac{7}{36}+5\times\frac{9}{36}+6\times\frac{11}{36}=\frac{161}{36}$$

12 総合問題(1)

A，B2人のそれぞれがもつ袋には，次のように点数のついた球が6個ずつ入っている。

　Aの袋：6点の球2個，3点の球1個，0点の球3個

　Bの袋：6点の球1個，3点の球3個，0点の球2個

A，Bは，各自の袋から球を1個取り出して元に戻す。このとき，取り出した球の点数をその人の得点とする。これを2回行って合計得点について考える。

(1)　Aの合計得点が6点になる確率を求めよ。

(2)　Aの合計得点の期待値を求めよ。

(3)　Aの合計得点とBの合計得点がともに6点になる確率を求めよ。

(4)　Aの合計得点とBの合計得点が等しくなる確率を求めよ。　（センター試験）

解説

(1)　A，Bの取り出し方は，それぞれ　$6^2=36$(通り)

　A，Bの合計得点表をつくると

A

	6	6	3	0	0	0
6	12	12	9	6	6	6
6	12	12	9	6	6	6
3	9	9	6	3	3	3
0	6	6	3	0	0	0
0	6	6	3	0	0	0
0	6	6	3	0	0	0

B

	6	3	3	3	0	0
6	12	9	9	9	6	6
3	9	6	6	6	3	3
3	9	6	6	6	3	3
3	9	6	6	6	3	3
0	6	3	3	3	0	0
0	6	3	3	3	0	0

　表から，Aの合計得点が6点になる確率は，$\dfrac{13}{36}$

別解

　1個の球を取り出すときAが6点，3点，0点を得る確率はそれぞれ，

　$\dfrac{2}{6}$，$\dfrac{1}{6}$，$\dfrac{3}{6}$である。

　Aの合計得点が6点になるのは，$6+0$，$3+3$，$0+6$だから，求める確率は

$$\frac{2}{6}\times\frac{3}{6}+\left(\frac{1}{6}\right)^2+\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{13}{36}$$

(2)　表から，Aの得点が0点，3点，6点，9点，12点となる確率はそれぞれ

　$\dfrac{9}{36}$，$\dfrac{6}{36}$，$\dfrac{13}{36}$，$\dfrac{4}{36}$，$\dfrac{4}{36}$である。

X	0	3	6	9	12
確率	$\frac{9}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$

←確率の和が1であることを確認

　よって，求める期待値は

$$E=0\times\frac{9}{36}+3\times\frac{6}{36}+6\times\frac{13}{36}+9\times\frac{4}{36}+12\times\frac{4}{36}=5$$

(3)　表から，Bの合計得点が6になる確率は　$\dfrac{13}{36}$

　よって求める確率は，　$\left(\dfrac{13}{36}\right)^2=\dfrac{169}{1296}$

(4)　表から，Bの得点が0点，3点，9点，12点となる確率はそれぞれ

　$\dfrac{4}{36}$，$\dfrac{12}{36}$，$\dfrac{13}{36}$，$\dfrac{6}{36}$，$\dfrac{1}{36}$であるから，AとBの得点が等しいときの確率は，

$$\frac{9}{36}\times\frac{4}{36}+\frac{6}{36}\times\frac{12}{36}+\frac{13}{36}\times\frac{13}{36}+\frac{4}{36}\times\frac{6}{36}+\frac{4}{36}\times\frac{1}{36}$$

$$=\frac{1}{36\times36}(9\cdot4+6\cdot12+13^2+4\cdot6+4\cdot1)=\frac{305}{1296}$$

注意

センター試験の確率は、本問題のように表や樹形図で数え上げると効率よく解ける。

13 総合問題(2)

さいころを投げて出た目の数だけ数直線上を動く点Pがある。Pは負の数の点にあるときは右に，正の数の点にあるときは左に動くものとする。また，Pははじめ-5の点にあり，原点または5の点に止まったらそれ以上さいころを投げることができないとする。

(1)　2回目にPが5の点に止まる確率を求めよ。

(2)　2回目にPが原点に止まる確率を求めよ。

(3)　3回目にPが原点に止まる確率を求めよ。　（センター試験）

解説

1回目にa，2回目にbが出たときを$(a,\ b)$と表す。

(1)　2回目にPが5の点で止まるのは$(4,\ 6)$の1通りであるから，

求める確率は，　$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

(2)　2回目にPが原点で止まるのは，

(i)　$a\leqq 4$つまり1回目が4以下のとき

$a+b=5$つまり1回目と2回目の目の和が5になれば原点で止まる。

これは，$(1,\ 4)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 2)$，$(4,\ 1)$の4通り

このときの確率は，$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 4=\frac{4}{36}$

(ii)　$a=6$のときつまり1回目が6のとき

2回目に1が出れば左に戻って原点になるので，$(6,\ 1)$の1通り

このときの確率は，$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

(i)，(ii)より，求める確率は，　$\frac{4}{36}+\frac{1}{36}=\frac{5}{36}$

(3)　2回目のPの座標は，-5，-4，-3，-2，-1，1，2，3，4となり，

どこにあっても次の1回の移動で原点に移れて，その確率は$\frac{1}{6}$である。

2回目のPの座標	-5	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4
2回の目の出方	(6, 6)	(6, 5)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 5)	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)
			(6, 4)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 4)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)
				(6, 3)	(3, 1)	(3, 3)	(3, 4)	(4, 4)	
					(6, 2)	(4, 2)	(4, 3)		

表から24通りあるので，求める確率は

$\left(\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\right)\times 24=\frac{24}{6^3}=\frac{1}{9}$

※原点と5に止まると終了するので，1回目に原点に止まらないから2回目に5や6にはならない

注意

(3)は工夫をして効率よく数え上げる問題。3回目に出る目まで考える必要はない。