1 順列(1)

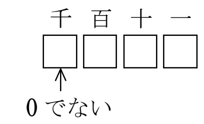
5 個の数字 0，2，3，5，7 を使ってできる，次のような数はいくつあるか。ただし，同じ数字を 2 度以上使うことはできない。

(1)　4 桁の整数　　　　(2)　5 桁の奇数

解説

(1)　千の位の数字は，0 以外から選ぶから　　4 通り

他の位の数字は，残りの 4 個の数字から 3 個を取って並べるから　　${}_4P_3$ 通り

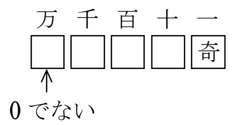


よって，求める個数は

$4\times{}_4P_3=4\times4\cdot3\cdot2=96$ (個)

(2)　一の位の数字は，奇数でなければならないから

3 通り



万の位の数字は，0 と一の位の数字を除いた数字から選ぶから　　3 通り

他の位の数字は，残りの 3 個の数字を並べるから

${}_3P_3=3!$ (通り)

よって，求める個数は　　$3\times3\times3!=9\times3\cdot2\cdot1=54$ (個)

2 順列(2)

男子 4 人，女子 5 人が 1 列に並ぶとき，次のような並び方は何通りあるか。

(1)　両端が女子である　　　　(2)　男子 4 人が続いて並ぶ

(3)　男子，女子が交互に並ぶ

解説

(1)　女子 5 人のうち，2 人が両端に並ぶ並び方は　　${}_5P_2$ 通り

そのおのおのに対して，間に並ぶ 7 人の並び方は　　${}_7P_7=7!$ (通り)

よって，求める並び方の総数は

${}_5P_2\times7!=20\times5040=100800$ (通り)

(2)　男子 4 人を 1 組と考えると，この 1 組と女子 5 人の並び方は　　${}_6P_6=6!$ (通り)

そのおのおのに対して，男子 4 人の並び方が　　${}_4P_4=4!$ (通り)

よって，求める並び方の総数は

$6!\times4!=720\times24=17280$ (通り)

(3)　男子，女子が交互に並ぶようにするには，まず女子 5 人を 1 列に並べて，その間の 4 か所に男子 4 人を並べればよい。

まず，女子 5 人の並び方は　　${}_5P_5=5!$ (通り)

そのおのおのに対して，女子と女子の間 4 か所に男子 4 人を並べる方法は

${}_4P_4=4!$ (通り)

よって，求める並び方の総数は

$5!\times4!=120\times24=2880$ (通り)

3 円順列・じゅず順列

異なる 6 色の玉がある。

(1)　これらの玉を机の上で円形に並べる方法は何通りあるか。

(2)　これらの玉で首飾りを作るとき，何種類の首飾りができるか。

(3)　6 色の玉から 4 個を取り出し，机の上で円形に並べる方法は何通りあるか。

解説

(1)　6 色の玉を机上で円形に並べる方法は

$\dfrac{{}_6P_6}{6}=(6-1)!=5!=120$ (通り)

(2)　首飾りは，裏返すと同じになることから

$\dfrac{(6-1)!}{2}=60$ (種類)

(3)　異なる 6 色の玉から 4 個取る順列 ${}_6P_4$ には，円順列としては同じものが 4 個ずつあるから

$\dfrac{{}_6P_4}{4}=\dfrac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{4}=90$ (通り)

4 重複順列

6 枚のカード 1，2，3，4，5，6 がある。

(1)　6 枚のカードを A，B の 2 組に分ける方法は何通りあるか。

(2)　6 枚のカードを 2 組に分ける方法は何通りあるか。

(3)　6 枚のカードを同じ大きさの 3 個の箱に分けるとき，カード 1，2 を別の箱に入れる方法は何通りあるか。ただし，空の箱はないものとする。

解説

(1)　6 枚のカードを，A，B 2 つの組のどちらかに入れる方法は　　$2^6=64$ (通り)

このうち，A，B の一方だけに入れる方法は　　2 通り

ゆえに，A，B 2 組に分ける方法は　　$64-2=62$ (通り)

(2)　(1) で A，B の区別をなくして　　$62\div2=31$ (通り)

(3)　カード 1，カード 2 が入る箱を，それぞれ A，B とし，残りの箱を C とする。

A，B，C の 3 つの箱のどれかにカード 3，4，5，6 を入れる方法は　　3^4 通り

このうち，C には 1 枚も入れない方法は　　2^4 通り

したがって　　$3^4-2^4=81-16=65$ (通り)

5 組合せ

男子 3 人，女子 4 人から 3 人を選ぶとき，次の場合の数を求めよ。

(1)　7 人から 3 人を選ぶ選び方

(2)　3 人のうち女子が 1 人だけ入っている選び方

(3)　3 人のうち女子が少なくとも 1 人入っている選び方

(4)　女子 2 人，男子 1 人を選んで 1 列に並べる方法

解説

(1)　${}_7C_3=\dfrac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$ (通り)

(2)　男子 3 人から 2 人選ぶ選び方は　　${}_3C_2$ 通り

そのおのおのについて，女子 4 人から 1 人選ぶ選び方は　　${}_4C_1$ 通り

よって，求める方法は　　${}_3C_2\times{}_4C_1=3\times4=12$ (通り)

(3)　すべて男子を選ぶ選び方は　　${}_3C_3$ 通り

よって，少なくとも 1 人女子が入っている選び方は

${}_7C_3-{}_3C_3=35-1=34$ (通り)

(4)　女子 4 人から 2 人選ぶ選び方は　　${}_4C_2$ 通り

そのおのおのについて，男子 3 人から 1 人選ぶ選び方は　　${}_3C_1$ 通り

ゆえに，女子 2 人，男子 1 人の選び方は　　${}_4C_2\times{}_3C_1$ 通り

選んだ 3 人を 1 列に並べる並べ方は　　${}_3P_3$ 通り

よって，求める方法は　　$({}_4C_2\times{}_3C_1)\times{}_3P_3=\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}\times3\times3\cdot2\cdot1=108$ (通り)

6 図形と組合せ

正七角形について，次の問いに答えよ。

(1)　対角線は何本あるか。

(2)　3 個の頂点を結んでできる三角形で，正七角形と辺を共有しないものは何個あるか。

解説

(1)　正七角形の 2 個の頂点を結んでできる線分の本数は　　${}_7C_2=21$ (本)

対角線の本数は，これから辺の数を引いたものであるから　　$21-7=14$ (本)

別解　正七角形の 1 個の頂点に対して，4 本の対角線が引けるから

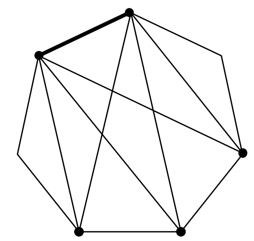
$7\times4\div2=14$ (本)

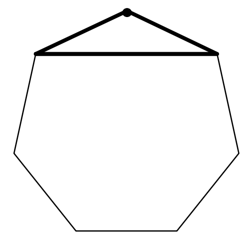
(2)　3 個の頂点を結んでできる三角形は全部で　　${}_7C_3=35$ (個)

このうち，正七角形と 1 辺を共有するものは　　7×3 個

正七角形と 2 辺を共有するものは　　7 個

よって，正七角形と辺を共有しない三角形は　　$35-(7\times3+7)=7$ (個)





7 組分けの問題

9 人の子供を次のように分ける方法は何通りあるか。

(1)　4 人，3 人，2 人の 3 組に分ける。

(2)　3 人ずつ，A，B，C の 3 組に分ける。

(3)　3 人ずつ 3 組に分ける。

(4)　5 人，2 人，2 人の 3 組に分ける。

解説

(1)　9 人から 4 人を選び，次に残った 5 人から 3 人を選ぶと，残りの 2 人は自動的に定まるから，分け方の総数は

${}_9C_4\times{}_5C_3=126\times10=1260$ (通り)

(2)　A に入れる 3 人を選ぶ方法は　　${}_9C_3$ 通り

B に入れる 3 人を，残りの 6 人から選ぶ方法は　　${}_6C_3$ 通り

C には残りの 3 人を入れればよい。

したがって，分け方の総数は

${}_9C_3\times{}_6C_3=84\times20=1680$ (通り)

(3)　(2) で，A，B，C の区別をなくすと，同じものが 3! 通りずつできるから，分け方の総数は

$({}_9C_3\times{}_6C_3)\div3!=1680\div6=280$ (通り)

(4)　A (5 人)，B (2 人)，C (2 人) の組に分ける方法は　　${}_9C_5\times{}_4C_2$ 通り

B，C の区別をなくすと，同じものが 2! 通りずつできるから，分け方の総数は

$({}_9C_5\times{}_4C_2)\div2!=756\div2=378$ (通り)

8 同じものを含む順列

YOKOHAMA の 8 文字を横 1 列に並べて順列を作る。次のような順列は何通りあるか。

(1)　AA と OO という並びをともに含む順列

(2)　Y，K，H，M がこの順に並ぶ順列

解説

(1)　並ぶ AA をまとめて A′，OO をまとめて O′ で表す。

このとき，求める順列は，A′，O′，Y，K，H，M の順列であるから，その総数は

$${}_6\mathrm{P}_6=6!=720\ (\text{通り})$$

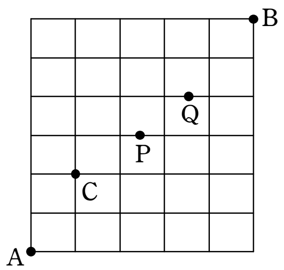
(2)　□ 4 個，O 2 個，A 2 個を 1 列に並べ，4 個の □ は左から Y，K，H，M とすればよい。

よって，求める順列の総数は

$$\frac{8!}{4!2!2!}=420\ (\text{通り})$$

9 最短経路の数

右の図のように，道路が碁盤の目のようになった街がある。地点 A から地点 B までの長さが最短の道を行くとき，次の場合は何通りの道順があるか。



(1)　全部の道順　　(2)　地点 C を通る。

(3)　地点 P は通らない。

(4)　地点 P および地点 Q を通らない。

解説

右へ 1 区画進むことを →，上へ 1 区画進むことを ↑ で表す。

(1)　最短の道順は → 5 個，↑ 6 個の順列で表されるから

$$\frac{11!}{5!6!}=\frac{11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=462\ (\text{通り})$$

(2)　A から C までの道順，C から B までの道順はそれぞれ

$$\frac{3!}{1!2!}=3\ (\text{通り}),\quad \frac{8!}{4!4!}=70\ (\text{通り})$$

よって，求める道順は　$3\times70=210$ (通り)

(3)　P を通る道順は　$\dfrac{5!}{2!3!}\times\dfrac{5!}{2!3!}=10\times10=100$ (通り)

よって，求める道順は　$462-100=362$ (通り)

(4)　Q を通る道順は　$\dfrac{7!}{3!4!}\times\dfrac{3!}{1!2!}=35\times3=105$ (通り)

P と Q の両方を通る道順は　$\dfrac{5!}{2!3!}\times\dfrac{3!}{1!2!}=10\times3=30$ (通り)

よって，P または Q を通る道順は　$100+105-30=175$ (通り)

ゆえに，求める道順は　$462-175=287$ (通り)

別解　[(1)～(3) の組合せによる考え方]

(1)　$5+6=11$ 個の場所から，→ 5 個が入る場所を選ぶと考えて

$${}_{11}\mathrm{C}_5=\frac{11!}{5!6!}=462\ (\text{通り})$$

(2)　A から C までは　${}_3\mathrm{C}_1$ 通り

C から B までは　${}_8\mathrm{C}_4$ 通り

よって，求める道順は　${}_3\mathrm{C}_1\times{}_8\mathrm{C}_4=3\times70=210$ (通り)

(3)　P を通る道順は　${}_5\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_2=10\times10=100$ (通り)

よって，求める道順は　$462-100=362$ (通り)

10 整数解の個数

(1)　$x+y+z=9$，$x\geqq0$，$y\geqq0$，$z\geqq0$ を満たす整数 x，y，z の組 $(x,\ y,\ z)$ は，全部で何組あるか。

(2)　$x+y+z=12$ を満たす正の整数 x，y，z の組 $(x,\ y,\ z)$ は，全部で何組あるか。

解説

(1)　異なる 3 種類のものから，重複を許して 9 個取る組合せの総数であるから

$${}_3\mathrm{H}_9={}_{3+9-1}\mathrm{C}_9={}_{11}\mathrm{C}_9={}_{11}\mathrm{C}_2=55\ (\text{組})$$

(2)　$x-1=X$，$y-1=Y$，$z-1=Z$ とおくと　$X\geqq0$，$Y\geqq0$，$Z\geqq0$

このとき，$x+y+z=12$ から　$(X+1)+(Y+1)+(Z+1)=12$

よって　$X+Y+Z=9$，$X\geqq0$，$Y\geqq0$，$Z\geqq0$　……[A]

求める正の整数解の組の個数は，[A] を満たす 0 以上の整数解 X，Y，Z の組の個数に等しいから，(1) の結果より　55 組

別解　12 個の ○ を並べる：　○○○○○○○○○○○○

このとき，○ と ○ の間の 11 か所から 2 つを選んで仕切りを入れ　A｜B｜C としたときの，A，B，C の部分にある ○ の数をそれぞれ x，y，z とすると，解が 1 つ決まるから　${}_{11}\mathrm{C}_2=55$ (組)

11 二項定理・多項定理(2012年度以降　新1年生は範囲外)

次の式の展開式において，[　] 内の項の係数を求めよ。

(1)　$(3x-2)^5$　$[x^3]$　　(2)　$(x-2y)^8$　$[x^3y^5]$

(3)　$(a+b+c)^8$　$[a^3b^3c^2]$

解説

(1)　展開式の一般項は　${}_5\mathrm{C}_r(3x)^{5-r}(-2)^r={}_5\mathrm{C}_r\cdot3^{5-r}\cdot(-2)^rx^{5-r}$

$5-r=3$ とすると　$r=2$

よって，x^3 の項の係数は　${}_5\mathrm{C}_2\cdot3^3\cdot(-2)^2=1080$

(2)　展開式の一般項は　${}_8\mathrm{C}_rx^{8-r}(-2y)^r={}_8\mathrm{C}_r\cdot(-2)^rx^{8-r}y^r$

x^3y^5 の項は $r=5$ のときで，その係数は　${}_8\mathrm{C}_5\cdot(-2)^5=-1792$

(3)　$\{(a+b)+c\}^8$ の展開式における c^2 を含む項は　${}_8\mathrm{C}_2(a+b)^6c^2$

また，$(a+b)^6$ の展開式における a^3b^3 の項の係数は　${}_6\mathrm{C}_3$

よって，$a^3b^3c^2$ の項の係数は　${}_8\mathrm{C}_2\times{}_6\mathrm{C}_3=560$

別解　$(a+b+c)^n$ の展開式における $a^pb^qc^r$ $(p+q+r=n)$ の項の係数は

$\dfrac{n!}{p!q!r!}$ であるから，求める係数は　$\dfrac{8!}{3!3!2!}=560$

12 総合問題

7個の文字，A，A，B，B，C，C，Cを1列に並べるものとする。

(1)　異なる並べ方の総数を求めよ。

(2)　Aが連続して並ぶ場合の数を求めよ。

(3)　Cが2つ以上連続して並ばない並べ方のうち，先頭がCである場合の数を求めよ。

(4)　Cが2つ以上連続して並ばない場合の数を求めよ。

(5)　同じ文字が2つ以上連続して並ばない場合の数を求めよ。　(センター試験)

解説

(1)　Aが2個，Bが2個，Cが3個あるので，同じものを含む順列より

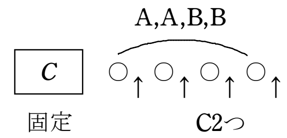
$$\frac{7!}{2!2!3!}=210(\text{通り})$$

(2)　AAをひとかたまりとして，B2個とC3個と合わせた合計6個の並べ方を考えて

$$\frac{6!}{2!3!}=60(\text{通り})$$

(3)　1番左をCと固定し，残りのA2個，B2個，C2個についてCが隣り合わないように順列を考える。右図のように○にA，A，B，Bを並べて入れる方法は

$$\frac{4!}{2!2!}=6(\text{通り})$$

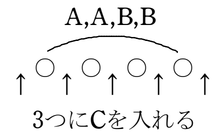


すき間の4つの↑の中から2つCを入れる場所を決めればいいので

$$\frac{4!}{2!2!}\times{}_4C_2=36(\text{通り})$$

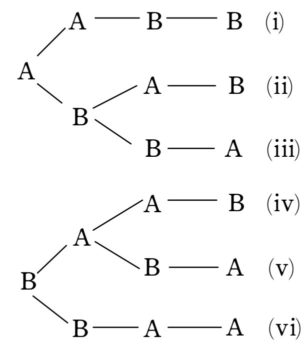
(4)　右図の○4つにAとBを入れ，その間の5つのすき間の↑から，3か所Cを入れる場所を決めればいいので，

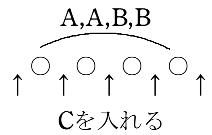
$$\frac{4!}{2!2!}\times{}_5C_3=60(\text{通り})$$



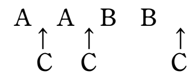
(5)　右図の○4つにA，A，B，Bを入れ，5つの間にCを3つ入れる方法を考える。

○4つにA，A，B，Bを入れる方法は次の6つある。



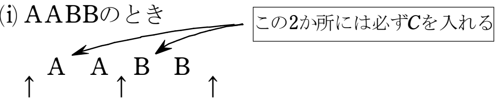


ただし，単純に5か所中3か所を選ぶと



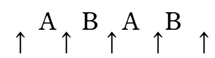
ACACBBCというようになることもあるので場合分けで考える。

(i) AABBのとき



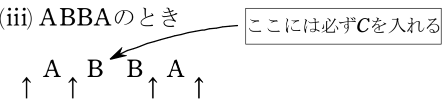
AA，BBのすき間でない残り3つのすき間から1つ選んで${}_3C_1=3$(通り)

(ii) ABABのとき



5つのすき間から3つ選んで${}_5C_3=10$(通り)

(iii) ABBAのとき



BBのすき間でない残り4つのすき間から2つ選ぶので　${}_4C_2=6$(通り)

(iv)は(iii)と同様に　6通り

(v)は(ii)と同様に　10通り

(vi)は(i)と同様に　3通り

よって，$2\times(3+10+6)=38$(通り)